О количестве нулей уравнения y^IV±γq(t)=0

Эгамбердиева Барнахон Гулямджановна
Преподаватель кафедры «Высшей математики
и информационных технологий»
Андижанский сельскохозяйственный институт
E-mail: serius-bexruz@mail.ru

Пусть q(t)- кусочно-непрерывная, ограниченная, неотрицательная функция на отрезке a≤t≤b. Через N(γ) обозначим количество двукратных нулей нетривиального решения y(t;γ) уравнения

$$\boldsymbol{y^{IV} \pm \gamma q(t) = 0} \qquad (1)$$

на отрезке a≤t≤b, то есть $y(t_0;\gamma) = y'(t_0;\gamma) = 0, t_0 \in (a;b)$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема: Имеет место соотношение:

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{N(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} = \frac{1}{\omega}\int_a^b Re\sqrt[4]{q(x)}dx$$

где ω - первый положительный корень уравнения chωcosω=1.

Доказательство:

а) пусть γq(t)=k^4=const,a≤t≤b. Тогда нетрудно заметить, что уравнение (1) имеет общее решение вида:

$$y(t) = C_1 cht + C_2 sht + C_{13} coskt + C_4 sinkt$$

Обозначим через t_1, t_2- две соседние двукратные нули решения y(t), т.е.

$$y(t_1) = y'(t_1) = y(t_2) = y'(t_2)$$

Далее положив $t_1 = 0, t_2 = \text{a}$ получим, что $chkacoska + 1 = 0$, т.е.
$chk(t_2 - t_1)cosk(t_2 - t_1) + 1 = 0$

Пусть ω - первый положительный корень уравнения $ch\omega cos\omega = 1$, где $k(t_2 - t_1) = \omega$.

Отсюда заключаем, что $(\gamma q)^{\frac{1}{4}}(t_2 - t_1) = \omega$, т.е. $t_2 - t_1 = \frac{\omega}{(\gamma q)^{\frac{1}{4}}}$.

Тогда число нулей $N(\gamma)$ уравнения (1) на отрезке $a \le t \le b$ равно

$$N(\gamma) \approx \frac{b-a}{t_2 - t_1} = \sqrt[4]{q(x)}\frac{b-a}{\omega}\int_a^b \sqrt[4]{q(x)}\,dx$$

Поэтому

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{N(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} = \frac{1}{\omega}\int_a^b Re\sqrt[4]{q(x)}dx$$

б) пусть теперь $q(t)$ - ступенчатая функция. Отрезок $[a;b]$ разбит на конечное число отрезков $\Delta_1, \Delta_{12}, \dots, \Delta_n$ и $q(t) = q, t_i = \Delta_i$. Пусть $N_i(\gamma)$ число двукратных нулей решения $y(t;\gamma)$ уравнения (1) на отрезке Δ_i Тогда согласно пункту а) очевидно, что

$$\frac{N(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} \approx \frac{1}{\omega}\int_a^b Re\sqrt[4]{q(x)}dx$$

т.е.

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{N(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} = \frac{1}{\omega}\int_a^b Re\sqrt[4]{q(x)}dx$$

c) пусть наконец, $q(t)$ -произвольная кусочно-непрерывная функция. Разобьём отрезок $[a;b]$ на n равных частей $\Delta_1, \Delta_{12}, \dots, \Delta_n$ и положив при $t \in \Delta_i$ имеем:

$q^+(t) = sup q(t)$, $q^-(t) = inf q(t)$, $t \in \Delta_i$

Пусть $y^+(t;\gamma)$ - решения уравнения (1) в котором вместо $q(t)$ стоит $q^+(t)$ Обозначим через $N^+(\gamma)$ число двукратных нулей $y^+(t;\gamma)$ корней на $[a;b]$. Аналогичным образом определим $N^-(\gamma)$. Тогда в силу теоремы сравнения Штурма, легко обнаружить, что

$N^+(\gamma) \geq N(\gamma) \geq N^-(\gamma)$

Согласно предыдущим пунктам а) и б) имеем:

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{N^+(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} = \frac{1}{\omega}\int_a^b Re\sqrt[4]{q^+(x)}dx,$$

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{N^-(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} = \frac{1}{\omega}\int_a^b Re\sqrt[4]{q^-(x)}dx$$

Отсюда при $n \to \infty$ получим утверждение теоремы.

Литература:

1. В.В.Степанов. Курс дифференциальных уравнений. -М.:Наука.1959 г.
2. Л.С.Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.-М.:Наука.1974 г.
3. Ю.Н.Бибиков. Общий курс дифференциальных уравнений. Изд.ЛГУ.,1981 г.