

О количестве нулей уравнения $y^{IV} \pm \gamma q(t) = 0$

Эгамбердиева Барнахон Гулямджановна
Преподаватель кафедры «Высшей математики
и информационных технологий»
Андижанский сельскохозяйственный институт
E-mail: serius-bexruz@mail.ru

Пусть $q(t)$ - кусочно-непрерывная, ограниченная, неотрицательная функция на отрезке $a \leq t \leq b$.
Через $N(\gamma)$ обозначим количество двукратных нулей нетривиального решения $y(t; \gamma)$ уравнения

$$y^{IV} \pm \gamma q(t) = 0 \quad (1)$$

на отрезке $a \leq t \leq b$, то есть $y(t_0; \gamma) = y'(t_0; \gamma) = 0, t_0 \in (a; b)$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема: Имеет место соотношение:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{N(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} = \frac{1}{\omega} \int_a^b \operatorname{Re} \sqrt[4]{q(x)} dx$$

где ω - первый положительный корень уравнения $\operatorname{ch} \omega \operatorname{cos} \omega = 1$.

Доказательство:

а) пусть $\gamma q(t) = k^4 = \text{const}, a \leq t \leq b$. Тогда нетрудно заметить, что уравнение (1) имеет общее решение вида:

$$y(t) = C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt + C_3 \operatorname{cos} kt + C_4 \operatorname{sin} kt$$

Обозначим через t_1, t_2 - две соседние двукратные нули решения $y(t)$, т.е.

$$y(t_1) = y'(t_1) = y(t_2) = y'(t_2)$$

Далее положив $t_1 = 0, t_2 = a$ получим, что $\operatorname{ch} ka \operatorname{cos} ka + 1 = 0$, т.е.

$$\operatorname{ch} k(t_2 - t_1) \operatorname{cos} k(t_2 - t_1) + 1 = 0$$

Пусть ω - первый положительный корень уравнения $\operatorname{ch} \omega \operatorname{cos} \omega = 1$, где $k(t_2 - t_1) = \omega$.

Отсюда заключаем, что $(\gamma q)^{\frac{1}{4}}(t_2 - t_1) = \omega$, т.е. $t_2 - t_1 = \frac{\omega}{(\gamma q)^{\frac{1}{4}}}$.

Тогда число нулей $N(\gamma)$ уравнения (1) на отрезке $a \leq t \leq b$ равно

$$N(\gamma) \approx \frac{b - a}{t_2 - t_1} = \sqrt[4]{q(x)} \frac{b - a}{\omega} \int_a^b \sqrt[4]{q(x)} dx$$

Поэтому

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{N(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} = \frac{1}{\omega} \int_a^b \operatorname{Re} \sqrt[4]{q(x)} dx$$

б) пусть теперь $q(t)$ - ступенчатая функция. Отрезок $[a; b]$ разбит на конечное число отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ и $q(t) = q_i, t_i \in \Delta_i$. Пусть $N_i(\gamma)$ число двукратных нулей решения $y(t; \gamma)$ уравнения (1) на отрезке Δ_i . Тогда согласно пункту а) очевидно, что

$$\frac{N(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} \approx \sum_{i=1}^n \frac{N_i(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} \approx \frac{1}{\omega} \int_a^b \operatorname{Re} \sqrt[4]{q(x)} dx$$

т.е.

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{N(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} = \frac{1}{\omega} \int_a^b \operatorname{Re} \sqrt[4]{q(x)} dx$$

с) пусть наконец, $q(t)$ - произвольная кусочно-непрерывная функция. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ и положив при $t \in \Delta_i$ имеем:

$$q^+(t) = \sup q(t), \quad q^-(t) = \inf q(t), \quad t \in \Delta_i$$

Пусть $y^+(t; \gamma)$ - решения уравнения (1) в котором вместо $q(t)$ стоит $q^+(t)$ Обозначим через $N^+(\gamma)$ число двукратных нулей $y^+(t; \gamma)$ корней на $[a; b]$. Аналогичным образом определим $N^-(\gamma)$. Тогда в силу теоремы сравнения Штурма, легко обнаружить, что

$$N^+(\gamma) \geq N(\gamma) \geq N^-(\gamma)$$

Согласно предыдущим пунктам а) и б) имеем:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{N^+(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} = \frac{1}{\omega} \int_a^b \operatorname{Re} \sqrt[4]{q^+(x)} dx$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{N^-(\gamma)}{\sqrt[4]{\gamma}} = \frac{1}{\omega} \int_a^b \operatorname{Re} \sqrt[4]{q^-(x)} dx$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ получим утверждение теоремы.

Литература:

1. В.В.Степанов. Курс дифференциальных уравнений. -М.:Наука.1959 г.
2. Л.С.Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.-М.:Наука.1974 г.
3. Ю.Н.Бибиков. Общий курс дифференциальных уравнений. Изд.ЛГУ.,1981 г.