Усиленные оценки модуля оператора функции в классе близких функций Nd(A,B)

СУЛТЫГОВ М.Д., кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики, Ингушский государственный университет

Аннотация.

Получены двусторонние оценки модуля оператора функции, построены экстремальные функции которые данные неравенства превращают в точные равенства на некоторых подмножествах. Установлен изоморфизм между классами близких к обобщенному классу звездных функций и выпуклыми функциями.

Ключевые слова. *Оператор дифференцирования, двусторонние оценки функционалов, специальные подмножества, экстремальные функции, изоморфизм.*

Abstract.

Bilateral estimates of the module of the operator of function are received, extreme functions which these inequalities turn into exact equalities on some subsets are constructed. Isomorphism between classes close to the generalized class of star functions and convex functions is established.

Keywords. *Operator of differentiation, bilateral estimates of functionalities, special subsets, extreme functions, isomorphism.*

Будем говорить,что $g(z) = g(z_1, \dots, z_n) \in H(D \subset C^n), n \geq 2, g(0) = 1$ принадлежит классу $N_D(A, B), -1 \leq B < A \leq 1$ если существует функция $f(z) \in M_D(A, B)$ [1,c] такая, что в D

$$Re\frac{\mathcal{R}_1 g(z)}{f(z)} > 0 \qquad (1)$$

Иногда будем называть $g(z) \in N_D(A, B)$ близкой к обобщенному классу звездных функций $f(z) \in M_D(A, B)$. Здесь $f_k \equiv \mathcal{R}_{n-1}[\mathcal{R}_{n-2} \dots [\mathcal{R}_{n-k}[f]] \dots]$ суперпозиция операторов [2,с.10]: $\mathcal{R}_\gamma[f(z)] = \gamma f(z) + \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}$, $\mathcal{R}^{(0)}_{n,n-1}[f] \equiv f$, $\mathcal{R}^{(1)}_{n-1,n-1}[f] \equiv \mathcal{R}_{n-1}[f]$ и значение функции $v = v(\tau, t)$ выражается в виде определителя матрицы размерности $2n \times 2n$. Обратным к оператору $\mathcal{R}_\gamma[f(z)]$ является оператор; $\mathcal{R}_\gamma^{-1} f(z) = \int_0^1 \varepsilon^\gamma f(\varepsilon z_1, \dots, \varepsilon z_n) d\varepsilon.$ Алгебру всех голоморфных в области D функций будем обозначать символом H(D). В пространстве H(D) вводится топология равномерной сходимости на компактных подмножествах D.

Все результаты работы публикуются впервые.

Отметим несколько свойств операторов дифференцирования [3,с.132]:

$$\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_\gamma : H(D) \Rightarrow H(D), \gamma \in R_+; \quad \mathcal{R}_0 f \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial f}{\partial z_i}; \quad \mathcal{R}_\gamma f \overset{\text{def}}{=} \gamma f + \mathcal{R}_0 f$$

Легко видеть, что если $f(z) = \sum_{k \in Z_+^n} a_k z^k \in H(D)$ есть степенное разложение функции f, то

$$(\mathcal{R}_0 f)(z) = \sum_{k \in Z_+^n} |k| a_k z^k, z \in D; \quad (\mathcal{R} f)(z) = \sum_{k \in Z_+^n} (|k|+1) a_k z^k, z \in D;$$

$$(\mathcal{R} f)(z) = \sum_{k \in Z_+^n} (|k|+1) a_k z^k, z \in D;$$

и с каждым числом $\alpha \in R_+$ можно связать степень порядка α оператора .

$$(\mathcal{R}^\alpha f)(z) = \sum_{k \in Z_+^n} (|k|+1)^\alpha a_k z^k, z \in D$$

Все сказанное ниже об операторах и его степенях $\mathcal{R}^\alpha$ будет иметь естественные аналоги и для оператора $\mathcal{R}_0$ и его степеней $\mathcal{R}_0^\alpha$, только следует иметь в виду, что оператор $\mathcal{R}_0$ естественно рассматривать (в частности, чтобы определить его дробные степени) на пространстве $H(B)$, профакторизованном по константам, т.е. на $H(B)/C$.

Отметим, что $\mathcal{R}^\alpha(f_\xi) = (\mathcal{R}^\alpha f)_\xi$ для всех $\xi \in \overline{B}$, где f_ξ- срез-функция, т.е. $f_\xi(\lambda) = f(\lambda\xi), \lambda \in D$. Эта формула, позволяет сводить многомерные результаты об операторе $\mathcal{R}^\alpha$ к одномерным.

Оператор $\mathcal{R}^\alpha$ при $\alpha > 0$ будем называть оператором дробного дифференцирования порядка α, а при α<0 - оператором дробного интегрирования порядка $(-\alpha)$

Замечание. Для упрощения записи все рассуждения ниже проводятся для случая двух комплексных переменных, однако полученные результаты легко переносятся на случай многих комплексных переменных.

В пространстве C^2 вводятся следующие области:

бицилиндр $U^2_{R_1,R_2} = \{(z_1,z_2) \in C^2 : |z_1| < R_1, |z_2| < R_2\}$,

$$K^2_{1,\sigma} = \left\{ z \in C^2 : (a_1|z_1|)^{\frac{1}{\sigma}} + (a_2|z_2|)^{\frac{1}{\sigma}} < 1, a_1, a_2 > 0, 0 < \sigma < 1 \right\},$$

а также множества:

$$\left\{\frac{|z_1|}{a_1} = \frac{|z_2|}{a_2}\right\} \cap K^2_{1,\sigma}, \tag{4}$$

$$\{a_1|z_1| = a_2|z_2|\} \cap K^2_{1,\sigma} \tag{5}$$

$$\left\{\frac{|z_1|}{R_1} = \frac{|z_2|}{R_2}\right\} \cap U^2_{R_1,R_2}(k), k = 1,2,3; \tag{6}$$

где:

$$U^2_{R_1,R_2}(1) = \left\{\left\{\frac{|z_1|}{R_1} = \frac{|z_2|}{R_2}\right\} \cap U^2_{R_1,R_2}\right\}, \tag{7}$$

$$U^2_{R_1,R_2}(2) = \left\{\left\{\frac{|z_1|}{R_1} > \frac{|z_2|}{R_2}\right\} \cap U^2_{R_1,R_2}\right\}, \tag{8}$$

$$U^2_{R_1,R_2}(2) = \left\{\left\{\frac{|z_1|}{R_1} < \frac{|z_2|}{R_2}\right\} \cap U^2_{R_1,R_2}\right\}, \tag{9}$$

и величины:

$$\omega(|z_1|,|z_2|) = \left\{(a_1|z_1|)^{\frac{1}{\sigma}} + (a_2|z_2|)^{\frac{1}{\sigma}}\right\}^{\sigma} \tag{10}$$

$$\gamma_k(|z_1|,|z_2|) = \max\nolimits_{z \in U^2_{R_1,R_2}(k)} \left\{\frac{|z_1|}{R_1}, \frac{|z_2|}{R_2}\right\} \text{ , где } k = 1,2,3; \tag{11}$$

а $U^2_{R_1,R_2}(k)$ определены в (7) – (9).

Теорема 1.Для функций $f(z_1,z_2) \in M_D(A,B)$ в$\overline{D_r}$=$r\overline{D}$,$0 < r < 1$ и где $-1 \le B < A \le 1, 0 < r < 1$ справедливы оценки:

$$\frac{(1-r)(1-Br)^{\frac{A-B}{B}}}{1+r} \le |\mathcal{R}_1 f(z_1,z_2)| \le \frac{(1+r)(1+Br)^{\frac{A-B}{B}}}{1-r}, B \ne 0, \tag{12}$$

$$\frac{(1-r)\exp(-Ar)}{1+r} \le |\mathcal{R}_1 f(z_1,z_2)| \le \frac{(1+r)\exp Ar}{1-r}, B = 0, \tag{13}$$

Доказательство данных оценок следует из неравенства $f(0,0)\frac{1-r^p}{1+r} \le |f(z_1,z_2)| \le \frac{1+r^p}{1-r} f(0,0)$

класса голоморфных функций

C_D[1,с.52]при $p \ge 1$ и класса $M_D(A,B), -1 \le B < A \le 1$[4,с.52]

$$(1-Br)^{\frac{A-B}{B}} \le |f(z_1,z_2)| \le (1+Br)^{\frac{A-B}{B}}, B \ne 0, \exp(-Ar) \le |f(z_1,z_2)| \le$$
$$expAr\,, B=0.$$

Покажем теперь точность полученных оценок (17) и (18) в областях $U^2_{R_1,R_2}$ и $K^2_{1,\sigma}$ и построим экстремальные функции.

Теорема 2.Если функция $f(z_1,z_2) \in M_{U^2_{R_1,R_2}}(A,B)$, то в $U^2_{R_1,R_2}$ имеет место оценка:

$$|\mathcal{R}_1 f(z_1,z_2)| = \begin{cases} \ge \frac{(1-\gamma_k(|z_1|,|z_2|))(1-B\gamma_k(|z_1|,|z_2|))^{\frac{A-B}{B}}}{1+\gamma_k(|z_1|,|z_2|)}, \\ \le \frac{(1+\gamma_k(|z_1|,|z_2|))(1+B\gamma_k(|z_1|,|z_2|))^{\frac{A-B}{B}}}{1-\gamma_k(|z_1|,|z_2|)}, \end{cases} B \ne 0, \quad (14)$$

где:

$\gamma_k(|z_1|,|z_2|) = \max_{z \in U^2_{R_1,R_2}(k)} \left\{\frac{|z_1|}{R_1}, \frac{|z_2|}{R_2}\right\}, k = 1,2,3;$ а экстремальная функция, достигающая точность на множестве $\left\{\frac{|z_1|}{R_1} = \frac{|z_2|}{R_2}\right\} \cap U^2_{R_1,R_2}$ имеет вид:

$$\Psi(z_1,z_2) = \frac{\left(1+\frac{e^{i\alpha_1}z_1}{R_1}+\frac{e^{i\alpha_2}z_2}{R_2}\right)\left\{1+\frac{B}{2}\left(\frac{e^{i\alpha_1}z_1}{R_1}+\frac{e^{i\alpha_2}z_2}{R_2}\right)\right\}}{1-\frac{e^{i\alpha_1}z_1}{R_1}+\frac{e^{i\alpha_2}z_2}{R_2}}$$

Теорема 3.Для функций $f(z_1,z_2) \in M_{U^2_{R_1,R_2}}(A,B)$ в $K^2_{1,\sigma}$ справедлива оценка:

$$|\mathcal{R}_1 f(z_1,z_2)| = \begin{cases} \ge \frac{(1-\omega(|z_1|,|z_2|))(1-B\omega(|z_1|,|z_2|))^{\frac{A-B}{B}}}{1+\omega(|z_1|,|z_2|)}, \\ \le \frac{(1+\omega(|z_1|,|z_2|))(1+B\omega(|z_1|,|z_2|))^{\frac{A-B}{B}}}{1-\omega(|z_1|,|z_2|)}, \end{cases} B \ne 0, \ (15)$$

где $\omega(|z_1|,|z_2|) = \left\{(a_1|z_1|)^{\frac{1}{\sigma}} + (a_2|z_2|)^{\frac{1}{\sigma}}\right\}^{\sigma}$ и точность, которой на множестве $\{a_1|z_1| = a_2|z_2|\} \cap K^2_{1,\sigma}$ достигаются экстремальными функциями вида

$$\varphi(z_1,z_2) = \frac{[1+2^{\sigma-1}(a_1z_1e^{i\alpha_1}+a_2z_2e^{i\alpha_2})]\{1+B2^{\sigma-1}(a_1z_1e^{i\alpha_1}+a_2z_2e^{i\alpha_2})\}^{\frac{A-B}{B}}}{1-2^{\sigma-1}(a_1z_1e^{i\alpha_1}+a_2z_2e^{i\alpha_2})}, \quad B \ne 0.$$

Связь между классами функций $N_D(A,B)$иN_D [1,с. 15] устанавливает.

Теорема 4. Функция $g(z_1,z_2) \in N_D(A,B)$ принадлежать классу функций N_{D_r} только в том случае,когда r удовлетворяет неравенству $r \leq r_0 < 1$ где r_0 наименьший положительный корень уравнения

$$Ar^3 - (1 + 2A + 2B)r^2 + (4 + A)r - 1 = 0 \qquad (16)$$

Доказательство. Из $\mathcal{R}_1 g(z_1, z_2) = f(z_1, z_2) \cdot p(z_1, z_2)$ имеем :

$$\frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_1 g(z_1, z_2)}{\mathcal{R}_1 g(z_1, z_2)} = \frac{\mathcal{R}_1 f(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)} + \frac{\mathcal{R}_0 p(z_1, z_2)}{p(z_1, z_2)}.$$

Отсюда

$$\frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_1 g(z_1, z_2)}{\mathcal{R}_1 g(z_1, z_2)} \geq \frac{\mathcal{R}_1 f(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)} - \left| \frac{\mathcal{R}_0 p(z_1, z_2)}{p(z_1, z_2)} \right|. \qquad (17)$$

Из того, что $f(z_1, z_2) \in M_D(A, B)$ при $p(z_1, z_2) \in S_D(0)[1, с. 7]$, следует

$$\frac{1 - Ar}{1 + Ar} \leq Re \frac{\mathcal{R}_1 f(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)} \leq \frac{1 + Ar}{1 + Ar}. \qquad (18)$$

Принимая во внимание неравенства (17),(18) и (12.8) из [1,с. 52]

$$|\mathcal{R}_0 f(z_1, z_2)| \leq \frac{2p\mathcal{R}_1 f(0,0) r^p}{(1 - r^p)^2}$$

для функций $f(z_1, z_2) = a_{00} + \sum_{k_1 = p \geq 1}^{\infty} \left(\sum_{k_2 = 0}^{k_1} a_{k_1 - k_2, k_2} {z_1}^{k_1 - k_2} {z_2}^{k_2} \right) \in C_D$ при $p \geq 1$ найдем, что

$$\frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_1 g(z_1, z_2)}{\mathcal{R}_1 g(z_1, z_2)} \geq \frac{1 - Ar}{1 - Br} - \frac{2r}{(1 - r)^2},$$

если r_0 является наименьшим положительным корнем уравнения (16).

Литература.

1.Баврин И.И. Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы для этих классов. - М.-1976.-99 с.

2.Баврин И.И. Операторный метод в комплексном анализе. – М.-1976.– 200 с.

3.Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.

-Москва.-1985.-Том 8.-275 с.

4.Султыгов М.Д.Обобщенный класс звездных функций $M_D(A, B)$вC^n

// Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук - № 4 (87).

-2016.-С 8-11.