

# Методы решения уравнений высших степеней

Есин Валентин Васильевич , пенсионер

## Аннотация

Предложенные в статье методы расширяют возможности использования математического аппарата и позволяют решать широкий круг народно-хозяйственных задач, в том числе, и исследования процессов, описываемых уравнениями высших степеней.

**Ключевые слова:** уравнение, метод, алгоритм, реализация.

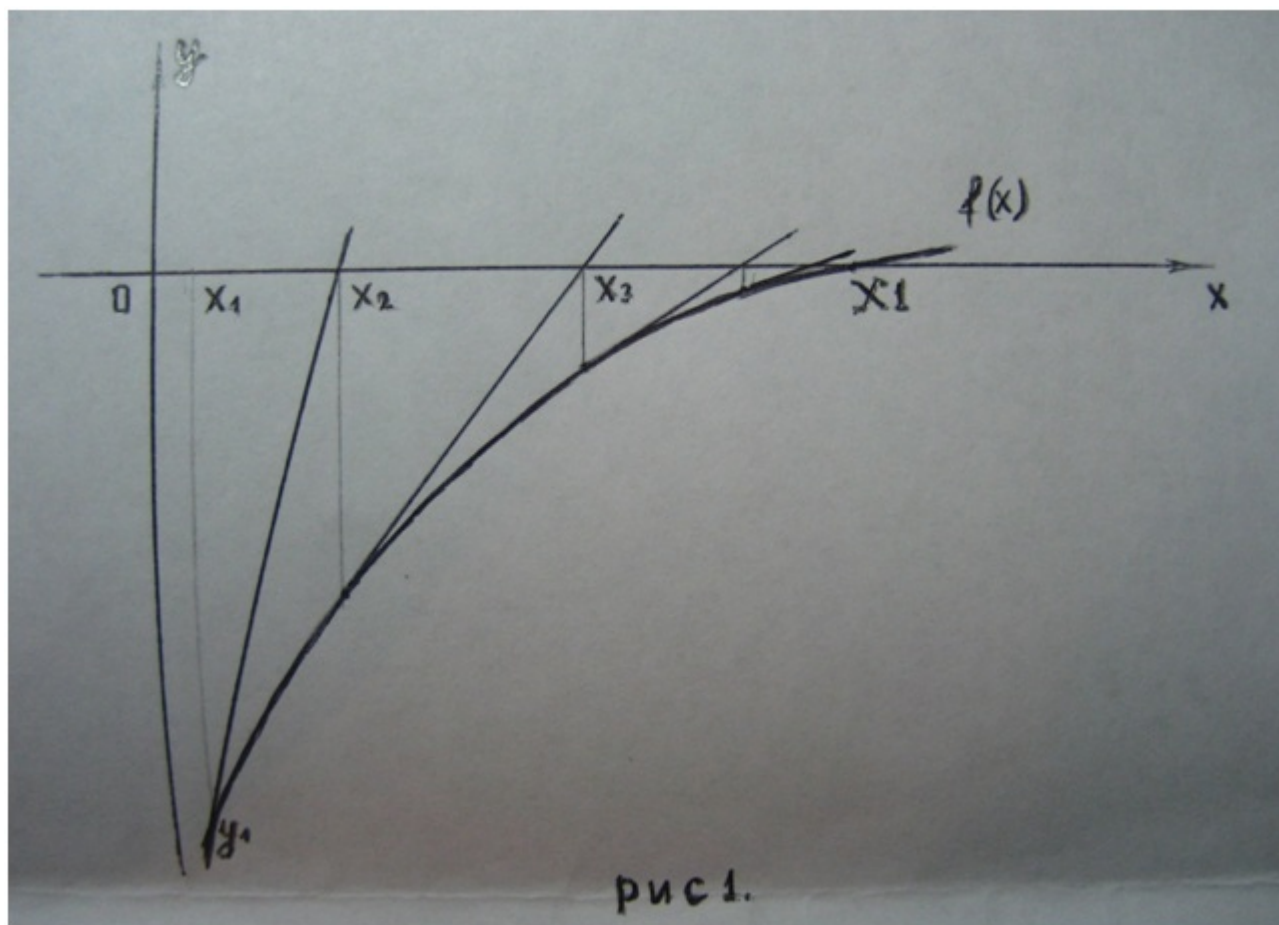
**Keywords:** the equation, method, algorithm, realization.

Известно, что прямого решения алгебраических уравнений степени выше 4-й не существует [1].

Предлагаю методы решения уравнений 5-й и выше степеней. Их суть...

1. Существует метод «касательных» для определения корня уравнения, находящегося в некотором интервале.

Пусть  $f(x)$  – график функции, к которому проведена касательная в точке  $y_1$ ;



Как видно из рисунка 1, чем меньше  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ , тем ближе график  $f(x)$  приближается к прямой линии.

Т. е. при малых  $\Delta x$  график функции  $f(x)$  можно заменить касательной к графику функции.

Тогда:  $\Delta f(x) = f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1) = f'(x_1) * \Delta x_1$ ,

где  $f'(x_1)$  – первая производная функции  $f(x)$  в точке  $x_1$

Если в данном выражении  $f(x_1 + \Delta x_1)$  приравнять к 0, то получим:

$$\Delta x_1 = - f(x_1) / f'(x_1) \quad (1)$$

Найдя  $x_2 = x_1 + \Delta x_1 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1)$ , и определив значения  $f(x_2)$  и  $f'(x_2)$ , можно на очередном шаге найти значение  $x_3 = x_2 - f(x_2) / f'(x_2)$ , и т. д. с каждым шагом приближаясь к графику функции  $f(x)$ .

В итоге, через определенное количество шагов, можно с требуемой точностью найти корень исходного уравнения  $f(x) = 0$

Выражение (1) можно получить, если в известной преобразованной формуле бинома Ньютона [2]:

$$F^n(x + \Delta x) = f^n(x) + f'(x) * \Delta x + f''(x) * \Delta x^2 / 2! + f'''(x) * \Delta x^3 / 3! + \dots + f^{(n)}(x) * \Delta x^n / n! \quad (2)$$

(которая, кстати, получается путем замены в функции  $f^n(x)$  аргумента  $X$  на выражение  $X + \Delta x$ ) - отбросить все члены, содержащие производные второго порядка и выше, и устремить  $f(x + \Delta x)$  к нулю.

(Действительно, при малых  $\Delta x$  выражениями  $\Delta x^2$ ,  $\Delta x^3$ ,  $\Delta x^n$ ... можно пренебречь.

Однако не стоит забывать о коэффициентах при  $\Delta x^2$ ,  $\Delta x^3$ ,  $\Delta x^n$ , а также о стационарных точках, когда  $f'(x) = 0$ .)

2. Если же в выражении (2) отбрасывать не все последующие члены, а только последний член, содержащий  $\Delta x^n$ , то можно получить другую функцию  $\psi_1(x)$ , график которой с большей достоверностью приближается к функции  $f(x)$ , чем график прямой линии.

Тогда:

$$\psi_1(x_1 + \Delta x_1) = f(x_1) + f'(x_1) * \Delta x_1 + f''(x_1) * \Delta x_1^2 / 2! + f'''(x_1) * \Delta x_1^3 / 3! + \dots + f^{(n-1)}(x_1) * \Delta x_1^{n-1} / (n-1)! \quad (3)$$

Устремив выражение  $\psi_1(x_1 + \Delta x_1)$  к 0, мы получаем уравнение  $(n-1)$ -степени относительно  $\Delta x_1$ :

$$\Delta x_1^{n-1} + a_1 * \Delta x_1^{n-2} + b_1 * \Delta x_1^{n-3} + \dots + k_1 = 0 \quad (4)$$

где: коэффициенты  $a_1, b_1, \dots, k_1$  - получаются путем деления каждого члена  $\psi_1(x_1 + \Delta x_1)$  на выражение  $f^{(n-1)}(x_1) / (n-1)!$

Решив уравнение (4), получаем значение  $\Delta x_1$ , а следовательно, уточненное значение корня  $x_2 = x_1 + \Delta x_1$ , при котором  $f(x)$  стремится к 0.

При необходимости, повторяя данный прием, мы находим новую функцию  $\psi_2(x)$ , следовательно, и новое уравнение

$$\Delta x_2^{n-1} + a_2 * \Delta x_2^{n-2} + b_2 * \Delta x_2^{n-3} + \dots + k_2 = 0 \quad (5)$$

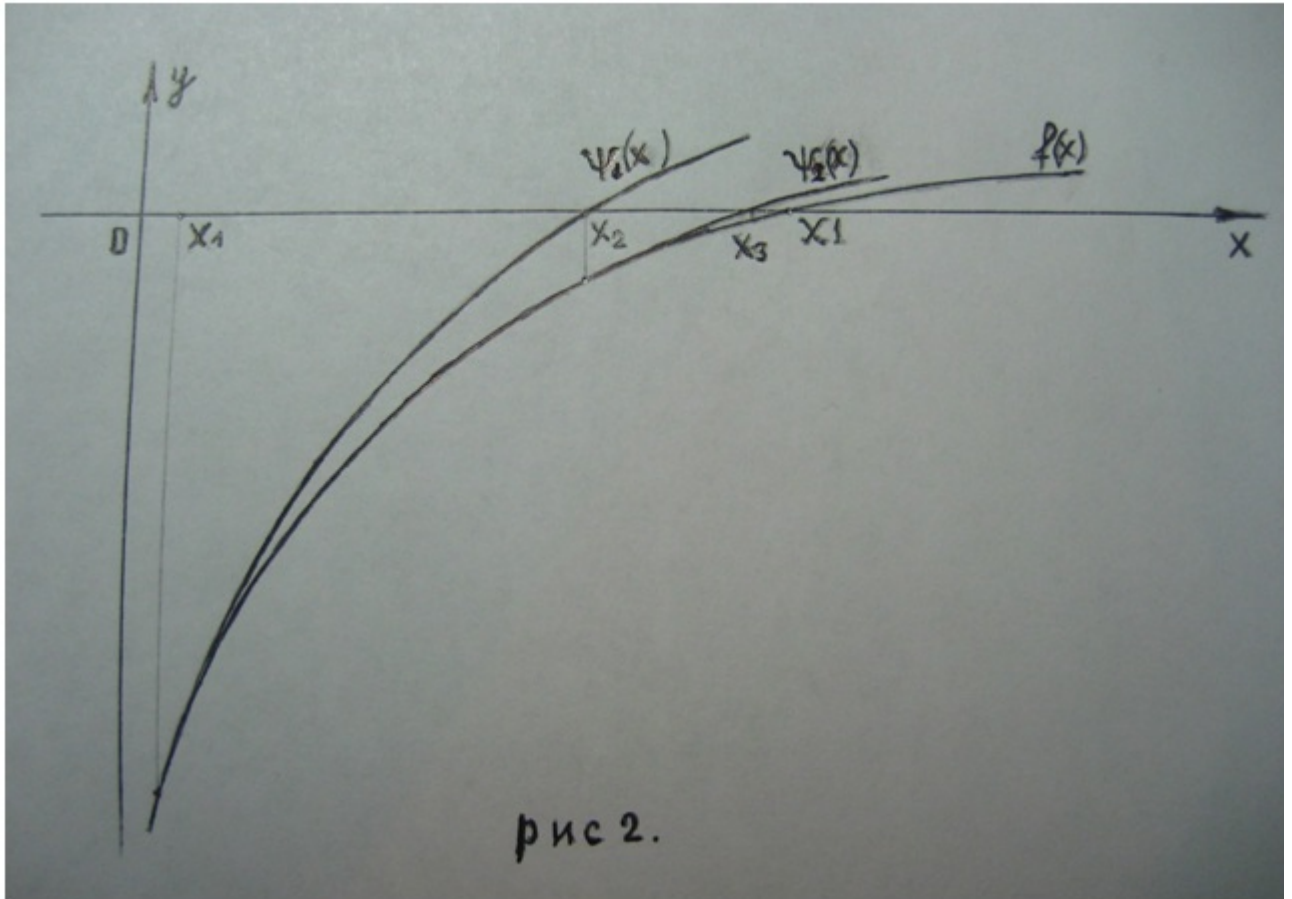
где: коэффициенты  $a_2, b_2, \dots, k_2$  - получаются путем деления каждого члена  $\psi_2(x_2 + \Delta x_2)$  на выражение  $f^{(n-1)}(x_2) / (n-1)!$

Решая уравнение (5), находим значения  $\Delta x_2$  соответственно  $x_3 = x_2 + \Delta x_2$  и т.д., пока не найдем корень исходного уравнения  $f(x)=0$  :

$$X_1 = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \dots + \Delta x_n(6)$$

Как видно из рис.2 и подтверждает практика решения уравнений [3], здесь уже нет жесткого ограничения на стремление  $\Delta x_i$  к 0, и требуется гораздо меньшее число шагов для определения (уточнения) одного из корней уравнения.

Таким образом, от уравнения  $f(x)$  (n)-степени мы перешли к последовательному решению уравнений (n-1)-степени (пусть и относительно новой переменной  $\Delta x$ ), т.е. фактически понизили степень уравнения.



3. Поскольку любой многочлен  $f(x)$ , имеющий корни  $x_i$ , можно представить в виде произведения:  $(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_i)$ ,

то, поделив  $f(x)$  на  $(x-x_1)$ , мы получаем новый многочлен, а, следовательно, и новую функцию  $\varphi(x)$  (n-1)-степени, (снова понижение степени уравнения) решая которую, мы получаем все остальные корни исходного уравнения  $f(x)=0$ :  $x_2, x_3, x_4, x_5$ .

Все эти три приема используются в программной реализации метода [3]:

1- в качестве дополнительного, 2 и 3- в качестве основного.

4. Решения уравнений высших степеней можно пояснить на примере решения уравнения 5-й степени в виде блок – схемы, изображенной на рис 3.

4,  $x^3, x^2, x$  и  $x^0$  соответственно (уравнение приведенное).

Блок-4  $f'(x)$  дифференцирует исходное уравнение и находит корни производной.

В анализаторе  $X_g$  определяется знак и значение функции  $f(x_i^1)$  в стационарных и близлежащих точках, по которым с помощью первого метода находится грубое значение одного из корней исходного уравнения  $X_g$ .

Это грубое значение  $X_g$  поступает в следующий блок:  $\psi(X_g)$ , где с помощью 2-го метода вычисляется значение  $\Delta x$  и, соответственно, более точное значение  $x$ .

Анализатор- $X$  проверяет достаточность точности вычисления первого корня  $X_1$ .

В очередном блоке 4:  $\varphi(X)$  производится деление  $f(x)$  на  $(x-X_1)$ , согласно 3-ьему методу, и определение оставшихся корней исходного уравнения:  $X_2, X_3, X_4, X_5$ .

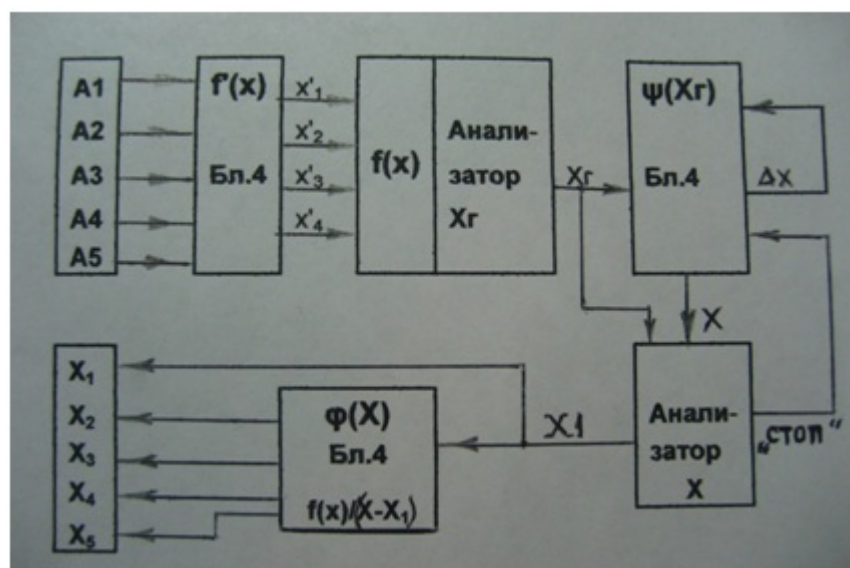


Рис 3.

В случае браковки первого корня повторяется цикл его уточнения и т.д.

Как видно из блок -схемы, основным элементом решения уравнения 5-й степени является блок-4 (подпрограмма для известного решения уравнения 4-ой степени [1]).

По такому же принципу построены и остальные подпрограммы решения уравнений (до 9 –й степени включительно) программной реализации метода, выполненного в Excel [3]. С той лишь разницей, что в качестве основного блока-«кирпичика» используется блок уже большей степени (степень «кирпичика» меньше степени уравнения на 1 ступень).

Хотелось бы остановиться на вопросе точности (приближенном значении вычисления) корней уравнений высших степеней: Поскольку используется метод обратной связи для проверки соответствия выражения  $f^n(x_i) = 0$ , то точность решения уравнений определяется лишь нашими желаниями (методами реализации решений на практике) и нашими возможностями (мощности и разрядностью компьютеров).

(Если в Excel оперировать 15-значными разрядами, то при больших значениях корней и повышении степени уравнений погрешность вычисления значительно возрастает).

Кроме того, определенные ограничения на решения уравнений накладывает необходимость точной постановки вопросов решаемой задачи (а именно, точное определение коэффициентов уравнения, что с практической точки зрения решения народно- хозяйственных задач, требует более

---

совершенных методов и приборов измерения).

В заключение, предвидя возражение оппонентов по поводу неактуальности постановки такой задачи, как решение уравнений высших степеней, приведу эпиграф к одной из подпрограмм:

Нельзя не видеть дальше носа и говорить, что мир курнос...

Что он в век «нанотехнологий» до сей проблемы не дорос...

P.S.: Методы решения уравнений высших степеней разработаны в 2003-2004 г, но проверены только после их программной реализации в 2006-2007г. Предложенный подход в теоретическом плане открывает перспективы решения уравнений высших степеней гораздо более высокой степени (свыше 9-й) и в практической сфере – совершенствование уже созданного варианта решения уравнений 5-9 степени. [3]

### **Литература:**

Электронные ресурсы (ресурсы Интернета):

1. Википедия. Уравнение четвертой степени.

[ru.wikipedia.org/wiki/ Уравнение \\_четвертой \\_степени.](http://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнение_четвертой_степени)

2. Википедия. Бином Ньютона.

[ru.wikipedia.org/wiki/ Бином\\_Ньютона.](http://ru.wikipedia.org/wiki/Бином_Ньютона)

### **Дополнительные материалы:**

3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2008611944 Приложение в среде разработки Excel: «Решение уравнений высших степеней(5:9)»

от 18 апреля 2008 г, автор Есин В.В.