Методы решения уравнений высших степеней

Есин Валентин Васильевич ,пенсионер

Аннотация

Предложенные в статье методы расширяют возможности использования математического аппарата и позволяют решать широкий круг народно-хозяйственных задач, в том числе, и исследования процессов, описываемых уравнениями высших степеней.

Ключевые слова: уравнение, метод, алгоритм, реализация.

Keywords:the equation, method, algorithm, realization.

Известно, что прямого решения алгебраических уравнений степени выше 4-й не существует [1].

Предлагаю методы решения уравнений 5-й и выше степеней. Их суть…

1. Существует метод «касательных» для определения корня уравнения, находящегося в некотором интервале.

Пусть f(x) – график функции, к которому проведена касательная в точке $y_{1.}$;

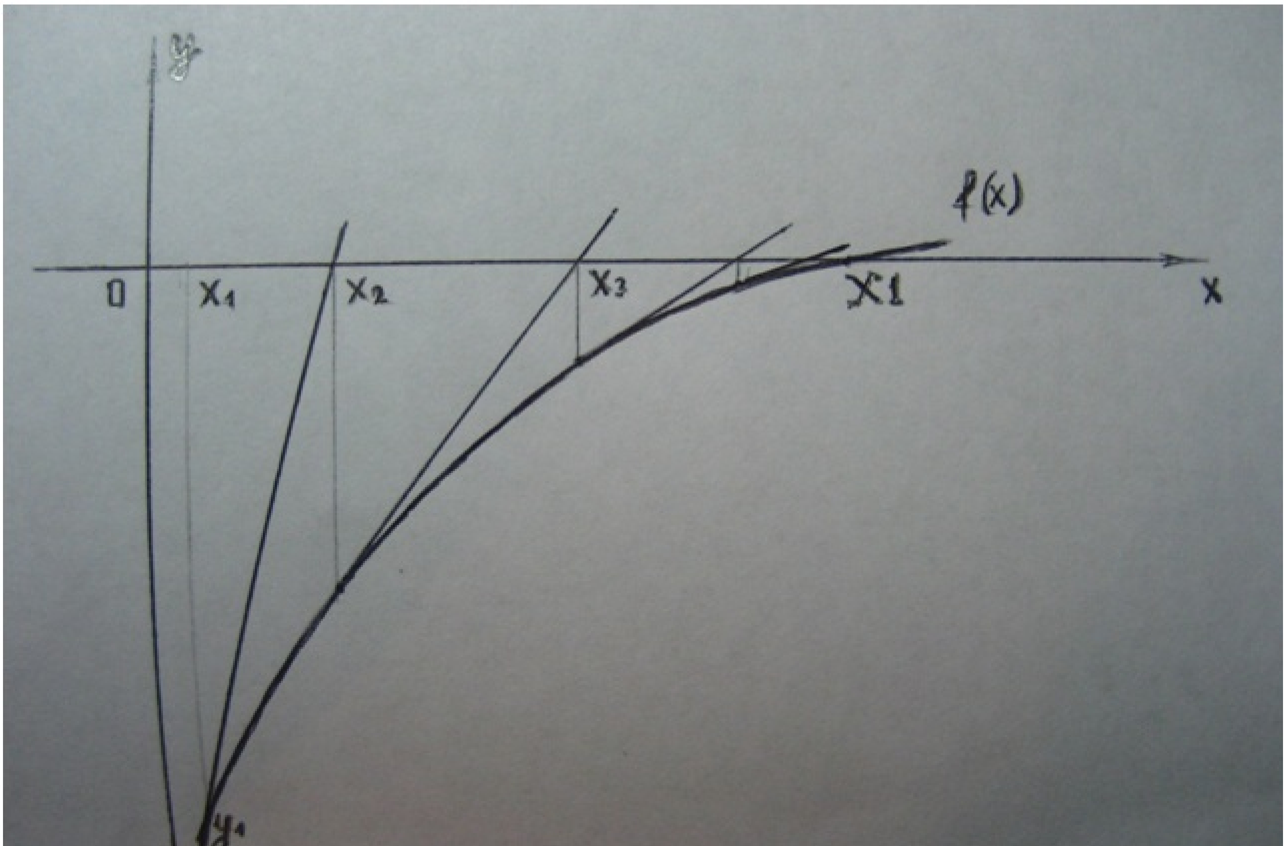


рис 1.

Как видно из рисунка 1, чем меньше $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, тем ближе график f(x) приближается к прямой линии.

Т. е. при малых Δx график функции f(x) можно заменить касательной к графику функции.

Тогда: $\Delta f(x) = f(x_1+\Delta x_1)-f(x_1)= f^1(x_1)*\Delta x_1$,

где $f^1(x_1)$ – первая производная функции $f(x)$ в точке x_1

Если в данном выражении $f(x_1+\Delta x_1)$ приравнять к 0, то получим:

$\Delta x_1 = - f(x_1) / f^1(x_1)$. (1)

Найдя $x_2= x_1+ \Delta x_1=x_1 - f(x_1) / f^1(x_1)$, и определив значения $f(x_2)$ и $f^1(x_2)$, можно на очередном шаге найти значение $x_3 = x_2 - f(x_3) / f^1(x_3)$, и т. д. с каждым шагом приближаясь к графику функции f(x).

В итоге, через определенное количество шагов, можно с требуемой точностью найти корень исходного уравнения f(x) =0

Выражение (1) можно получить, если в известной преобразованной формуле бинома Ньютона [2]:

$$F^n(x+\Delta x)=f^n(x)+f^1(x)*\Delta x+ f^{11}(x)*\Delta x^2/2!+ f^{111}(x)*\Delta x^3/3!+\ldots.+ f^{(n)}(x)*\Delta x^n/n! \quad (2)$$

(которая, кстати, получается путем замены в функции $f^n(x)$ аргумента X на выражение X+Δx) - отбросить все члены, содержащие производные второго порядка и выше, и устремить f(x+Δx) к нулю.

(Действительно, при малых Δx выражениями Δx^2, Δx^3 ,Δx^n...можно пренебречь.

Однако не стоит забывать о коэффициентах при Δx^2, Δx^3 ,Δx^n, а также о стационарных точках, когда $f^1(x)=0$.)

2. Если же в выражении (2) отбрасывать не все последующие члены, а только последний член,содержащий Δx^n, то можно получить другую функцию $\psi_1(x)$, график которой с большей достоверностью приближается к функции f(x), чем график прямой линии.

Тогда:

$$\psi_1(x_1+\Delta x_1)= f(x_1)+f^1(x_1)*\Delta x_1+ f^{11}(x_1)*\Delta x_1^2/2+ f^{111}(x_1)*\Delta x_1^3/3!+\ldots.+$$
$$f^{(n-1)}(x_1)*\Delta x_1^{n-1}/(n1)! \quad (3)$$

Устремив выражение $\psi_1(x_1+\Delta x_1)$ 0, мы получаем уравнение (n-1)-степени относительно Δx_1:

$\Delta x_1^{n-1}+a1*\Delta x_1^{n-2}+в1*\Delta x_1^{n-3}+\ldots+k1=0$ (4)

где: коэффициенты а1,в1...k1- получаются путем деления каждого члена $\psi_1(x_1+\Delta x_1)$ на выражение $f^{(n-1)}(x_1)/(n-1)!$

Решив уравнение (4), получаем значение Δx_1 , а следовательно,уточненное значение корня $x_2 = x_1+\Delta x_1$, при котором f(x) стремится к 0.

При необходимости, повторяя данный прием, мы находим новую функцию $\psi_2(x)$, следовательно, и новое уравнение

$\Delta x_2^{n-1}+a2*\Delta x_2^{n-2}+в2*\Delta x_2^{n-3}+\ldots+k2 = 0$, (5)

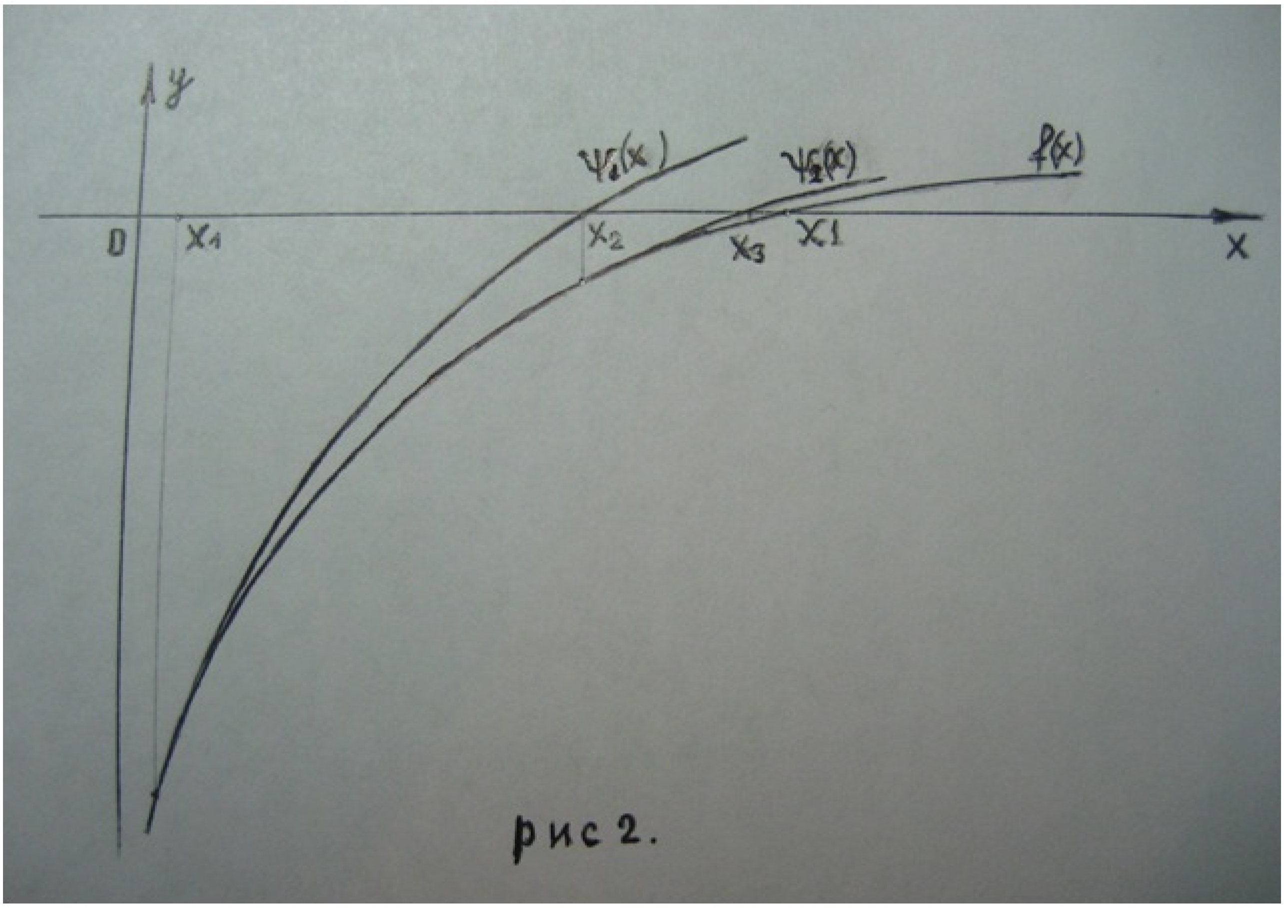
где: коэффициенты а2,в2...k2- получаются путем деления каждого члена $\psi_2(x_2+\Delta x_2)$ на выражение $f^{(n-1)}(x_2)/(n-1)!$

Решая уравнение (5), находим значения Δx_2и соответственно $x_3 = x_2 + \Delta x_2$ и т.д., пока не найдем корень исходного уравнения f(x)=0 :

$$X1 = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \ldots + \Delta x_n (6)$$

;Как видно из рис.2 и подтверждает практика решения уравнений [3], здесь уже нет жесткого ограничения на стремление Δx_i к 0, и требуется гораздо меньшее число шагов для определения (уточнения) одного из корней уравнения.

Таким образом, от уравнения f(x) (n)-степени мы перешли к последовательному решению уравнений(n-1)-степени (пусть и относительно новой переменной Δx), т.е.фактически понизили степень уравнения.



3.Поскольку любой многочлен f(x), имеющий корниx_i , можно представить в виде произведения:$(x-x_1)*(x-x_2)*\ldots(x-x_i)$,

то, поделив f(x) на (x-x1), мы получаем новый многочлен, а, следовательно, и новую функцию φ(x) (n-1)-степени, (снова понижение степени уравнения) решая которую, мы получаем все остальные корни исходного уравненияf(x)=0:X_2, X_3, X_4, X_5.

Все эти три приема используются в программной реализации метода[3]:

1- в качестве дополнительного,2 и 3- в качестве основного.

4. Решения уравнений высших степеней можно пояснить на примере решения уравнения 5-й степени в виде блок – схемы, изображенной на рис 3.

4, x^3, x^2, x иx^0 соответственно (уравнение приведенное).

Блок-4 $f^1(x)$ дифференцирует исходное уравнение и находит корни производной.

В анализаторе Хг определяется знак и значение функции f (x_i^1) в стационарных и близлежащих точках точках, по которым с помощью первого метода находится грубое значение одного из корней исходного уравнения Хг .

Это грубое значение Хг поступает в следующий блок4: ψ(Хг), где с помощью 2-го метода вычисляется значение Δх и, соответственно, более точное значение х.

Анализатор-Х проверяет достаточность точности вычисления первого корня X_1.

В очередном блоке 4: φ(X) производится деление f(x) на) (x-X1), согласно 3-ьему методу, и определение оставшихсякорней исходного уравнения: X_2,X_3,X_4,X_5.

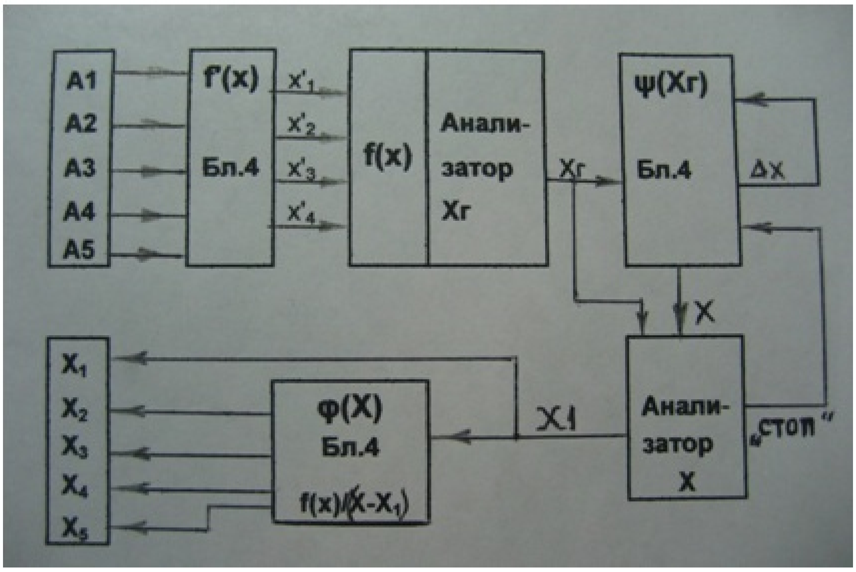


Рис з.

В случае браковки первого корня повторяется цикл его уточнения и т.д.

Как видно из блок -схемы, основным элементом решения уравнения 5-й степени является блок-4 (подпрограмма для известного решения уравнения 4-ой степени [1]).

По такому же принципу построены и остальные подпрограммы решения уравнений (до 9 –й степени включительно) программнойреализации метода, выполненного в Excel [3]. С той лишь разницей, что в качестве основного блока-«кирпичика» используется блок уже большей степени (степень «кирпичика» меньше степени уравнения на 1 ступень).

Хотелось бы остановиться на вопросе точности (приближенном значении вычисления) корней уравнений высших степеней: Поскольку используется метод обратной связи для проверки соответствия выраженияf^n (x_i) =0, то точность решения уравнений определяется лишь нашими желаниями (методами реализации решений на практике) и нашими возможностями (мощности и разрядностью компьютеров).

(Если в Excel оперировать 15-значащими разрядами, то при больших значениях корней и повышения степени уравнений погрешность вычисления значительно возрастает).

Кроме того, определенные ограничения на решения уравнений накладывает необходимость точной постановки вопросов решаемой задачи (а именно, точное определение коэффициентов уравнения, что с практической точки зрения решения народно- хозяйственных задач, требует более совершенных методов и приборов измерения).

В заключение, предвидя возражение оппонентов по поводу неактуальности постановки такой задачи,как решение уравнений высших степеней, приведу эпиграф к одной из подпрограмм:

Нельзя не видеть дальше носа и говорить, что мир курнос…

Что он в век «нанотехнологий» до сей проблемы не дорос…

P.S.: Методырешения уравнений высших степеней разработаны в 2003-2004 г, но проверены только после их программной реализации в2006-2007г. Предложенный подход в теоретическом плане открывает перспективы решения уравнений высших степеней гораздо более высокой степени (свыше 9-й) и в практической сфере – совершенствование уже созданного варианта решения уравнений 5-9 степени. [3]

Литература:

Электронные ресурсы (ресурсы Интернета):

1.Википедия.Уравнение четвертой степени.

ru.wikipedia.org/wiki/ Уравнение _четвертой _степени.

2.Википедия.Бином Ньютона.

ru.wikipedia.org/wiki/ Бином_Ньютона.

Дополнительные материалы:

3.Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2008611944 Приложение в среде разработки Excel: «Решение уравнений высших степеней(5:9)»

от 18 апреля 2008 г, автор Есин В.В.