

Некоторые дополнения к понятию иррациональное число

Павлов А.Т., г. Иркутск

Некоторые дополнения к понятию иррациональное число

Иррациональным называется число, которое можно выразить в форме бесконечной непериодической десятичной дроби. Например, иррациональными являются числа $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{9}$, числа e , π , синусы многих рациональных величин, логарифмы целых чисел и т.д. В отличие иррационального числа, любое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби, которую также можно представить обыкновенной дробью $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа, $q \neq 0$. Например, рациональные числа $1,(3) = \frac{4}{3}$, $2,(0) = \frac{2}{1}$, $2,(1) = \frac{19}{9}$, $0,35(0) = \frac{7}{20}$.

Введем некоторые дополнения к понятию иррациональное число. Рассмотрим на примере. Уравнение $x^2 - 3x + 8 = 0$ имеет корни $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{41}$. Корни данного уравнения являются иррациональными числами, но каждое из данных иррациональных чисел представляет собой алгебраическую сумму собственно иррационального числа $\frac{1}{2}\sqrt{41}$ и рационального числа $\frac{3}{2}$. Собственно иррациональную составляющую $\frac{1}{2}\sqrt{41}$ назовем чисто иррациональным числом, выражение $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{41}$ назовем составным иррациональным числом.

Определение. Иррациональное число, которое нельзя представить в виде алгебраической суммы другого иррационального числа и рационального числа назовем чисто иррациональным числом. Иррациональное число, которое представлено в виде алгебраической суммы чисто иррационального числа и рационального числа назовем составным иррациональным числом.

Как уже отмечалось выше, $\frac{1}{2}\sqrt{41}$ – чисто иррациональное число, $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{41}$ – составные иррациональные числа.

Подразделение иррациональных чисел на чисто иррациональные числа и составные иррациональные числа предлагается в математике впервые. Можно провести аналогию в терминологии с комплексными числами, где комплексные числа вида $a + bi$ при $b \neq 0$ называются мнимыми, числа вида bi называются чисто мнимыми.

Составное иррациональное число может быть задано в неявном виде, в этом случае возникает необходимость представить иррациональное число в виде суммы рационального и чисто иррационального чисел. Примеры такого вида есть в курсе алгебры 9-го класса и встречаются в заданиях ЕГЭ по математике. Рассмотрим один из алгоритмов решения подобного вида задач на примерах.

Пример 1. Предположим, что $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ – составное иррациональное число. В таком случае представим его в виде $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = q + \delta$, где q – рациональная, δ – чисто иррациональная составляющая числа. Так как $\sqrt{3}$ – чисто иррациональное, полагаем $\delta = a\sqrt{3}$. Отсюда запишем $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = q + a\sqrt{3}$, возведем выражение во вторую степень, получим $4 + 2\sqrt{3} = q^2 + 2qa\sqrt{3} + 3a^2$.

Сумма рациональных составляющих $q^2 + 3a^2 = 4$, чисто иррациональные составляющие равны $2\sqrt{3} = 2qa\sqrt{3}$. Решая полученные уравнения, находим $q = 1$, $a = 1$. В результате получаем $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

Пример 2. Покажем, что $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$ – составное иррациональное число. Пусть $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = q + \delta$, $\delta = a\sqrt{5}$. Отсюда $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = q + a\sqrt{5} \Rightarrow 14 + 6\sqrt{5} = q^2 + 2qa\sqrt{5} + 5a^2$.

Сумма рациональных составляющих: $q^2 + 5a^2 = 14$, чисто иррациональная составляющая: $6\sqrt{5} = 2qa\sqrt{5}$. Решая полученные уравнения, находим $q = 3$, $a = 1$, окончательно запишем $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = 3 + \sqrt{5}$.

На основании введенного разделения иррациональных чисел на чисто иррациональные и составные иррациональные сформулируем некоторые очевидные свойства иррациональных чисел.

1. Алгебраическая сумма чисто иррациональных выражений не может быть равна рациональному числу, кроме числа ноль

Например, пусть $\sqrt{7} - \sqrt{3} = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа, $q \neq 0$. Возведем выражение во вторую степень, получим $10 - 2\sqrt{21} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{21} = \frac{10q^2 - p^2}{2q^2}$. Получили противоречие – чисто иррациональное число представлено обыкновенной дробью, следовательно $\sqrt{7} - \sqrt{3} \neq \frac{p}{q}$.

2. Алгебраическая сумма составного и чисто иррациональных чисел может равняться рациональному числу

Например, $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 1$.

3. Алгебраическая сумма составных иррациональных чисел может равняться рациональному числу

Например, а) $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(3 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = 3 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 4$,

б) $\sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38} = \sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2)^3} = \sqrt{5} + 2 - (\sqrt{5} - 2) = 4$.