

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ В МАТЕМАТИКЕ



Мишин Анатолий Вячеславович

Обучающийся ГБОУ МО «Одинцовский «Десятый лицей»

Научный руководитель: **Стрельникова Ирина Анатольевна**
учитель математики, ГБОУ МО «Одинцовский «Десятый лицей»

Аннотация: Область применения средних величин в математике очень велика: олимпиады редко обходятся без такого типа задач, особенно те, при прохождении которых вы получаете дополнительные баллы для дальнейшего обучения в ВУЗе.

Ключевые слова: средняя величина, геометрическая интерпретация, трапеция

AVERAGES IN MATHEMATICS

Mishin Anatoly Vyacheslavovich

Scientific adviser:

Strelnikova Irina Anatolyevna

Abstract: The scope of application of averages in mathematics is very wide: Olympiads are rarely complete without this type of problem, especially those that, when passed, give you additional points for further study at a university.

Key words: average value, geometric interpretation, trapezoid

Введение и обоснование выбора темы

Школьная программа по математике включает в себя лишь малую часть понятий о средних величинах. Поэтому, однажды услышав на уроках алгебры и геометрии о среднем арифметическом, среднем геометрическом, а также, что есть еще и другие средние, захотелось узнать о них больше. Тем более, что очень часто эти понятия встречаются в задачах более высокого уровня, олимпиадных задачах. Более глубокие знания в этом вопросе не только расширят наш кругозор, но и помогут разобраться в решении многих сложных задач, предлагаемых в олимпиадах, экзаменах. Поэтому я решил взять для подробного рассмотрения именно эту тему.

Область применения средних величин в математике очень велика: олимпиады редко обходятся без такого типа задач, особенно те, при прохождении которых вы получаете дополнительные баллы для дальнейшего обучения в ВУЗе.

Цель исследования: изучить различные виды средних величин и взаимосвязи между ними, выпустить сборник задач по данной теме.

Задачи:

- 1) провести опрос среди обучающихся 9 классов по теме «Среднее в математике»;
- 2) рассмотреть виды различных средних в математике;
- 3) дать определения и формулы, по которым вычисляются различные средние величины;
- 4) дать геометрическую интерпретацию взаимосвязей различных средних на примере трапеции;
- 5) решить геометрические задачи, в которых применяются средние величины и их свойства.
- 6) выпустить брошюру с заданиями по теме «Среднее в математике» и провести урок в 9 классе «Четыре классические средние в трапеции».

В этой теме много неизвестного. В школьном учебнике геометрии отсутствуют эти сведения. Поэтому, я посчитал полезным собрать сведения по данной теме в одной брошюре и подобрать к ним задачи по данной теме.

1.2. Виды средних величин:

1. Среднее арифметическое

- Определение: Средним арифметическим чисел a и b называется их полусумма $(a+b)/2$.

Свойства среднего арифметического: является средней линией трапеции;

- если a и b увеличить или уменьшить в несколько раз, то и среднее арифметическое увеличится или уменьшится во столько же раз. Аналогично, если a и b увеличить или уменьшить на одну и ту же величину, то и среднее арифметическое этих чисел увеличится или уменьшится на столько же;
- Среднее арифметическое положительных чисел a и b расположено между этими числами.

2. Среднее квадратичное

Определение: Средним квадратичным чисел a и b называется число, равное арифметическому квадратному корню из среднего арифметического квадратов чисел a и b :

$$\sqrt{((a^2+b^2)/2)}.$$

Свойства среднего квадратичного:

- Для любых значений a и b среднее квадратичное чисел больше или равно среднему арифметическому этих чисел;
- Если в трапеции провести отрезок, разбивающий её на две равновеликие трапеции, то длина этого отрезка есть среднее квадратичное оснований трапеции.

3. Среднее гармоническое

- Определение: Средним гармоническим для чисел a и b называется число, равное $2ab/(a+b)$.

Свойства среднего гармонического: среднее гармоническое положительных чисел a и b является наименьшим из всех средних величин;

В трапеции отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей и параллельный основаниям является средним гармоническим для оснований этой трапеции;

- Среднее гармоническое чисел a и b расположено между этими числами.

4. Среднее геометрическое

- Определение: Средним геометрическим для неотрицательных чисел a и b называется число, равное арифметическому квадратному корню из произведения этих чисел:

$$\sqrt{ab}$$

Свойства среднего геометрического:

- Среднее геометрическое положительных чисел a и b лежит между этими числами;
- Для любых неотрицательных значений a и b среднее геометрическое чисел не больше их среднего арифметического

1.3. Сравнение классических средних

$$H \leq G \leq A \leq S,$$

Где H – среднее гармоническое,

G – среднее геометрическое,

A – среднее арифметическое,

S – среднее квадратичное.

$$2ab/(a+b) \leq \sqrt{ab} \leq (a+b)/2 \leq \sqrt{(a^2+b^2)/2}$$

Равенство в каждом случае достигается тогда и только тогда, когда $a = b$.

1.4. Четыре классические средние в трапеции

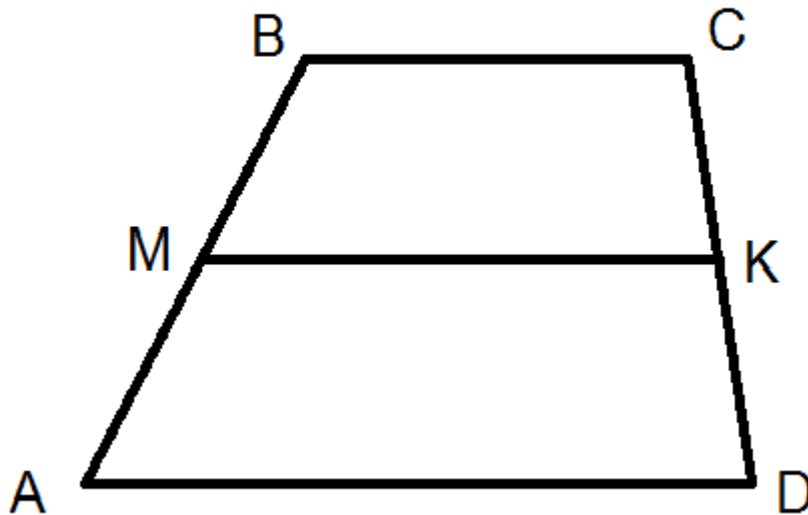
Наиболее интересным мне показался материал, связывающий трапецию со средними величинами. Так же, трапеция обладает свойствами полезными для решения задач повышенной сложности.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в геометрии средние величины.

Дано: трапеция $ABCD$, $BC=a$, $AD=b$.

1. рис.1. Проведём отрезок MK – средняя линия, тогда $MK=(a+b)/2$, следовательно MK – среднее арифметическое a и b .

1.

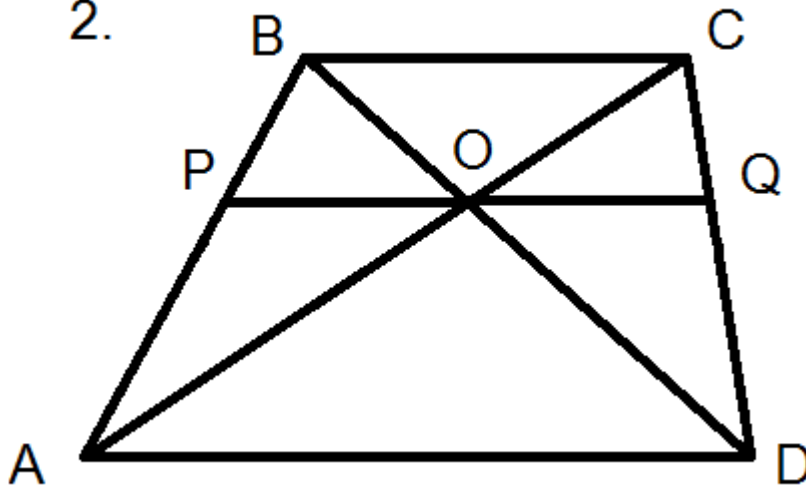


2. рис.2. Проведём через O отрезок PQ параллельный основаниям ABCD, P и Q лежат на боковых сторонах ABCD.

Треугольники AOD и COB подобны, то $AO/CO=DO/BO=AD/BC=b/a$. Из подобия треугольников APO и ABC,

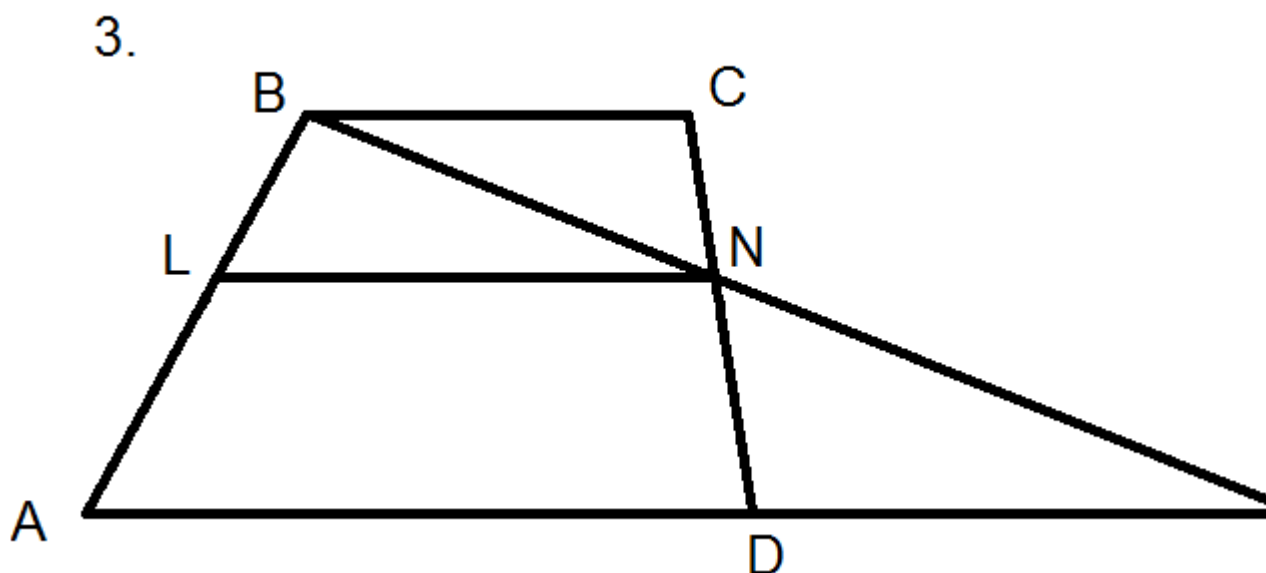
$PO/BC=AO/AC=b/(a+b)$, аналогично $OQ/BC=DO/DB=b/(a+b)$, таким образом, $PO=OQ=ab/(a+b)$, следовательно $PQ=2ab/(a+b)$ – среднее гармоническое a и b.

2.



3. рис.3. Проведём отрезок LN параллельный основаниям, $BL/AL=CN/DN=\sqrt{a}/\sqrt{b}$. Проведём луч BN до пересечения с AD в точке T.

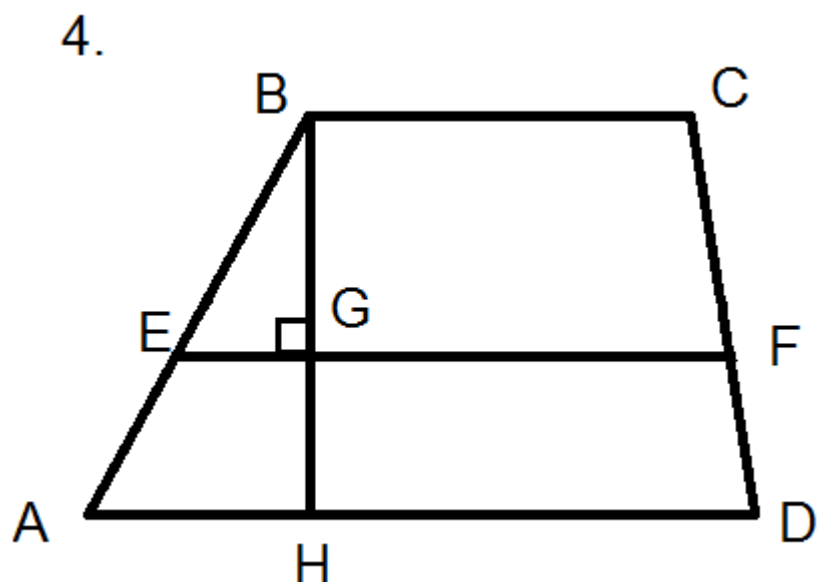
Так как треугольники BNC и TND подобны, то $BC/TD=BN/TN=CN/DN=\sqrt{a}/\sqrt{b}$, тогда $TD=(a\sqrt{b}) / \sqrt{a}=\sqrt{ab}$. Так как треугольники LBN и ABT подобны, то $LN/AT=BN/BT$, следовательно, $LN=\sqrt{a(b+\sqrt{ab})} / (\sqrt{a}+\sqrt{b}) = \sqrt{ab}$ – среднее геометрическое a и b.



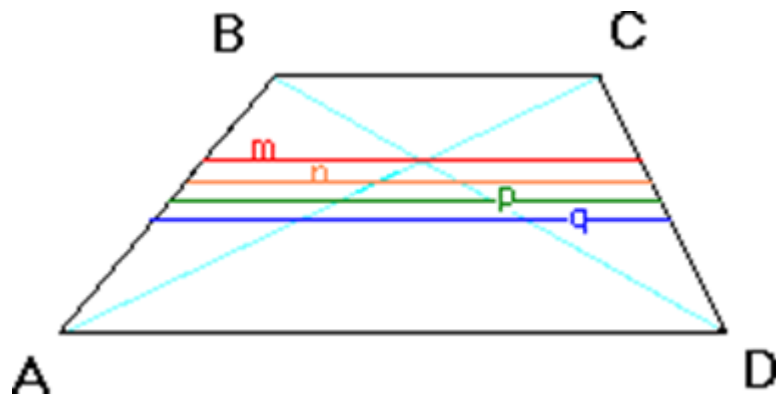
4. рис.4. Проведём отрезок EF, параллельный основаниям, E и F лежат на боковых сторонах, и такой, что трапеции EBCF и AEFD равновелики. Проведём высоту трапеции BH, пересекающую EF в точке G, пусть $EF=d$,

$BH=h$, $BG=m$, $GH=n$. Тогда $m=0.5S(ABCD) / 0.5(a+d)=(a+b)h / 2(a+b)$; $n=0.5S(ABCD) / 0.5(b+d)=(a+b)h / 2(b+d)$.

Так как, $h=m+n$, то $h=(a+b)h / 2(a+b) + (a+b)h / 2(b+d)= 2(a+b)(b+d)$, следовательно $d=\sqrt{(a^2 + b^2)/2}$ - среднее квадратичное a и b.



Итак, подводя итог, можно сказать, что в любой трапеции можно рассматривать 4 отрезка, равные соответственно одной из средних величин в математике.



В трапеции среднее геометрическое оснований трапеции расположено следующим образом, где

m -среднее гармоническое основание;

n -среднее геометрическое;

p - среднее арифметическое;

q - среднее квадратичное.

Следует отметить, что при различных значениях a и b последовательность этого расположения не меняет.

2. Практическое применение классических средних в задачах.

2.1. Примеры задач

В трапеции отрезок, соединяющий боковые стороны, проходит через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям. Площади треугольников с вершинами в точке пересечения и основаниями, равными основаниям трапеции, относятся как 9: 1. Найдите отношение площадей трапеций, на которые делит исходную трапецию данный отрезок.

Два отрезка, параллельных основаниям трапеции, соединяют боковые стороны и равны 1,75 и 5 соответственно. Один из них проходит через точку пересечения диагоналей, а второй делит трапецию на две равные по площади трапеции. Найдите отношение отрезков боковой стороны, на которую делят её два данных отрезка.

В трапеции проведены два отрезка, параллельных основаниям. Один проходит через точку пересечения диагоналей и равен 1,6, а второй делит трапецию на две подобные и равен 2. Найдите отношение отрезков боковой стороны, на которые её делят два исходных отрезка.

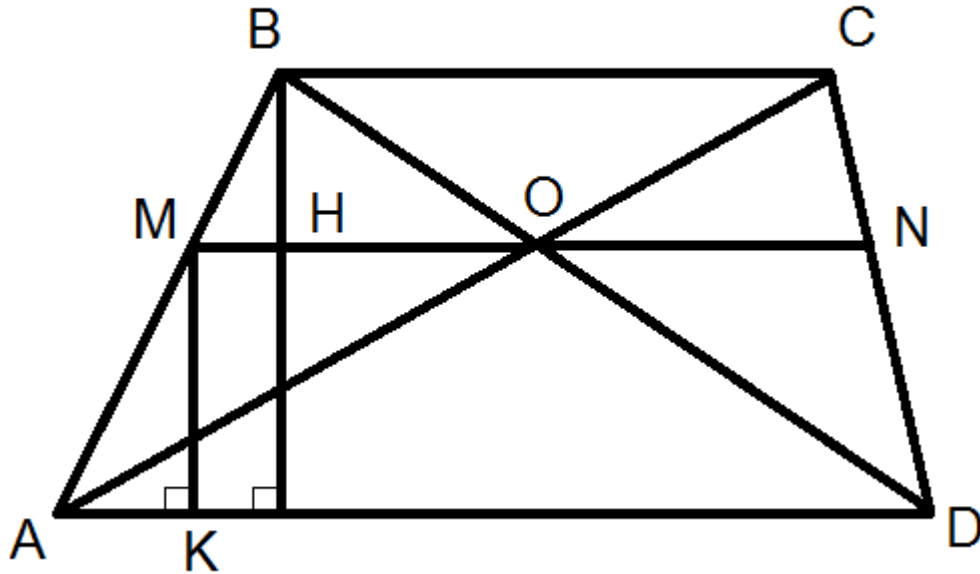
В трапеции проведены два отрезка, параллельных основаниям и соединяющих боковые стороны. Один делит трапецию на две подобные трапеции и равен $\sqrt{7}$, а второй делит трапецию на две трапеции, равные по площади, и равен 5.

В трапеции точка пересечения диагоналей является вершиной двух треугольников, площади которых относятся как 81: 16, и основания которых являются основаниями трапеции. Найдите отношение площадей подобных трапеций, образованных отрезком, параллельным основанию.

2.2. Решение задач

1. Дано:

ABCD – трапеция, BC и AD – основания, PK параллелен основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей, O – точка пересечения диагоналей, площади треугольников AOD и BOC относятся как 9:1. $S(AMND) : S(MACN)$ - ?



а) Треугольники BOC и AOD подобны по двум углам, значит $AD/BC=AO/OC=OD/OB$.

б) Так как площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных сторон, тогда $S(AOD)/S(BOC) = (AD/BC)^2$, значит $(AD/BC)^2 = 9/1$, $AD = 3BC$.

MN – среднее гармоническое оснований трапеции ABCD,

$$MN = 2AD \cdot BC / (AD + BC) = 2BC \cdot 3BC / (3BC + BC) = 3BC/2.$$

в) Пусть $q = MQ$ – высота трапеции AMND,

$h = BK$ – высота трапеции MBCN.

$$q/h = AD/BC = 3/1, q = 3h.$$

$$г) S(AMND) = (AD + MN)/2 \cdot q = (3BC + 3BC/2)/2 \cdot 3h = 27BC/4 \cdot h;$$

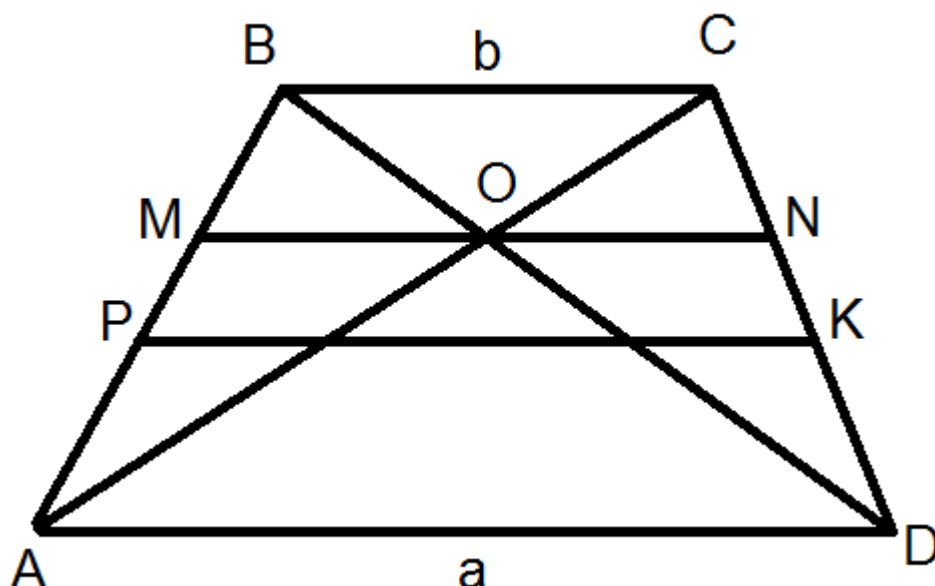
$$S(MBCN) = (MN + BC)/2 \cdot h = (3BC/2 + BC)/2 \cdot h = 5BC/4 \cdot h.$$

$$S(AMND)/S(MBCN) = (27BC/4 \cdot h)/(5BC/4 \cdot h) = 27/5.$$

Ответ: 27:5.

2. Дано:

ABCD – трапеция, MN и PK – параллельны основаниям, $MN=1,75$, $PK=5$, площади APKD и PBCK равны, MN проходит через O – точка пересечения диагоналей. AP : PM : MB - ?



а) Пусть $AD=a$, $BC=b$ тогда $MN = 2ab/(a+b)$, $PK = \sqrt{(a^2+b^2)}/2$.

Составим систему из которой мы получим, что

$$a^2+b^2+2ab = 50+7/4(a+b);$$

$$(a+b)^2-7/4(a+b)-50=0; \text{ замена } a+b=t,$$

$$4t^2 - 7t - 200 = 0, \text{ отсюда } a+b=8, ab=7, \text{ следовательно } a=7, b=1.$$

б) Рассмотрим треугольники MBO и ABD- эти треугольники подобны, тогда $BM/OM=AB/AD$, значит $BM/AB=1/8$ или $BM=1/8AB$.

в) Пусть BH перпендикулярен AD. Рассмотрим треугольники ABH и PBQ: $PB/AP=BQ/HQ$.

$$S(APKD) = (AD+PK)/2 \cdot HQ = 6HQ;$$

$$S(PBCK) = (PK+BC)/2 \cdot BQ = 3HQ.$$

Так как эти площади равны из условия получим, что $BQ=2HQ$.

Значит $PB/AP=2/1$, $PB=2AP$, $AB=3AP$, из этого следует что $PB=2/3AB$, $AP=1/3AB$.

Так как $BM=1/8AB$, а $AP=1/3AB$, то $PM=AB - 1/8AB - 8/24AB=13/24AB$.

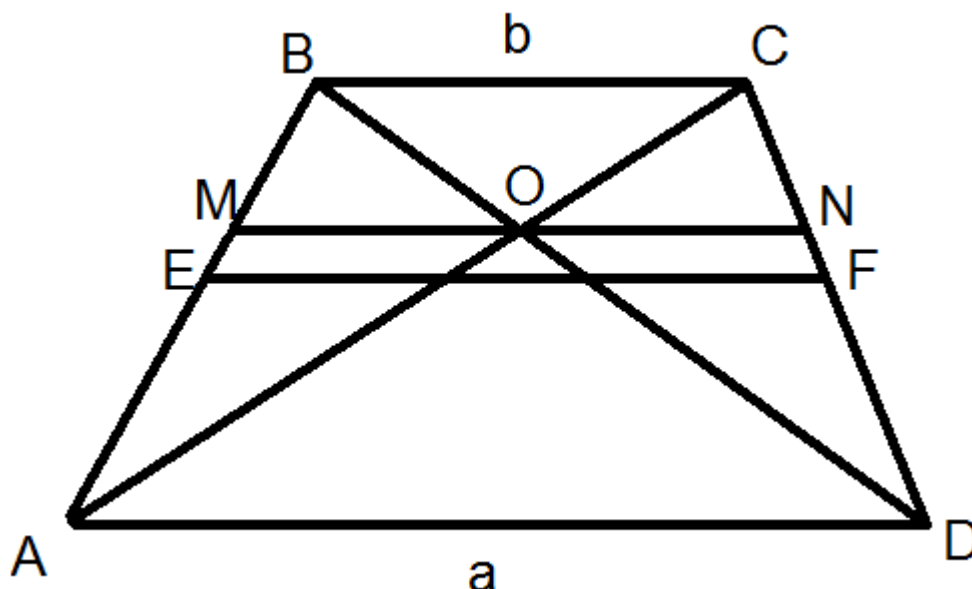
Тогда $AP:PM:MB = 8:13:3$

Ответ: 8:13:3.

3. Дано:

ABCD – трапеция, AB пересекается с CD в точке O, PK и LF параллельны основаниям, $PK=1.6$, $LF=2$, трапеции LBCF и ALFD подобны.

AE : EM : MB - ?



а) Пусть $BC=b$, $AD=a$.

Тогда $MN=2ab/(a+b)=1.6$; $EF=\sqrt{ab}=2$;

Составим систему уравнений, из нее получим, что $a+b=5$, $ab=4$,

Следовательно $a=4$, $b=1$.

б) Трапеции $AEFD$ и $EBCF$ подобны, проведём высоту BH .

BH пересекает EF в точке K .

$$S(AEFD) = (AD+EF)/2 \cdot HK = 3HK;$$

$$S(EBCF) = (EF+BC)/2 \cdot KB = 3/2KB;$$

$$S(ABCD) = (AD+BC)/2 \cdot (HK+KB) = 2.5HK + 2.5KB.$$

$$S(AEFD) + S(EBCF) = S(ABCD), \text{ значит } 3HK + 1.5KB = 2.5HK + 2.5KB;$$

Следовательно $HK=2BK$.

По теореме Фалеса $EB/AE=BK/HK=1/2$.

Значит $AE=2/3AB$ и $EB=1/3AB$.

в) Также известно, что $BM/AB=OM/AD$, следовательно $BM=1/5AB$.

$$AE=2/3AB, EB=1/3AB, BM=1/5AB.$$

$$EM = AB - AE - BM = AB - 10/15AB - 3/15AB = 2/15AB.$$

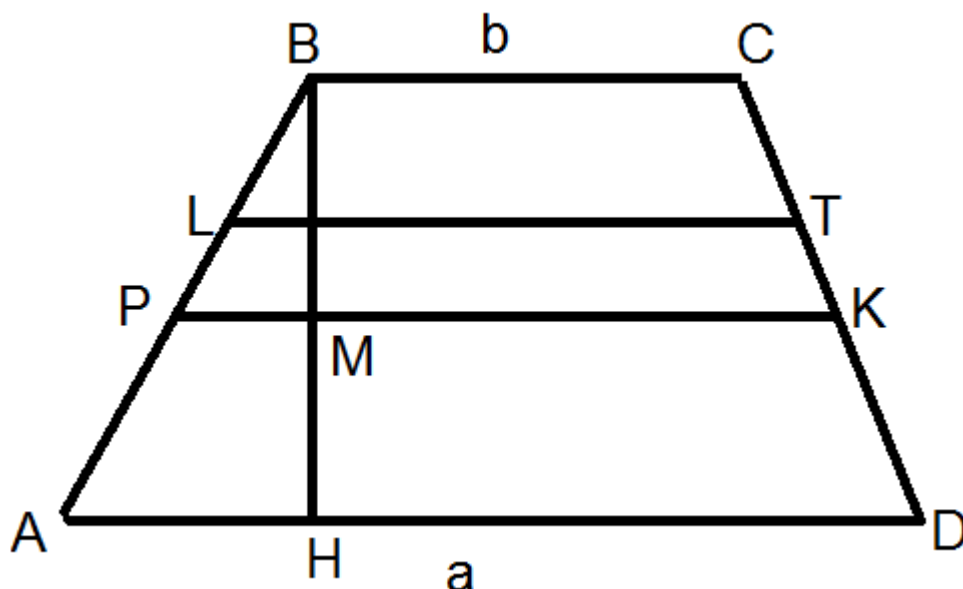
$$\text{В итоге } AE:EM:MB = 10:2:3$$

Ответ: 10:2:3.

4. Дано:

$ABCD$ – трапеция, BC и AD – основания, отрезки LT и PK параллельны основаниям, трапеции $ALTD$ и $LBCT$ подобны, площади трапеций $APKD$ и $PBCK$ равны, $LT=\sqrt{7}$, $PK=5$.

$AP : PL : LB = ?$



а) Пусть $AD=a$, $BC=b$;

$PK = \sqrt{(a^2+b^2)/2}$, $LT = \sqrt{ab}$, можно составить систему, из которой получим, что $(a+b)^2 = 64$, $ab = 7$.

Так как a и $b > 0$, то $a+b=8$, $ab=7$;

$a = 7$, $AD = 7$

$b = 1$ $BC = 1$.

б) Проведём высоты BH к основанию AD .

$$S(APKD) = (AD+PK)/2 * MH = 6MH,$$

$$S(PBCK) = (PK+BC)/2 * MB = 3MB,$$

$$S(ABCD) = (AD+BC)/2 * HB = 4HB.$$

$$\text{Тогда } S(ABCD) = S(APKD) + S(PBCK);$$

$$4HB = 6MH + 3MB, \text{ так как } HB = MB + MH, \text{ то}$$

$$4MB + 4MH = 6MH + 3MB$$

$$MB = 2MH.$$

$$MB/BH = MB/(MH+HB) = 2MB/3MB = 2/3,$$

$$\text{значит } PB = 2/3AB, AP = 1/3AB.$$

в) Так как трапеция $ALTD$ подобна $LBCT$, то

$$LB/AL = LT/AD = \sqrt{7}/7, \text{ но } AL+LB=AB, LB=\sqrt{7}AB/7, \text{ следовательно } AB = AL + \sqrt{7}AL/7.$$

$$\text{Отсюда } AL = (7 - \sqrt{7})/6 * AB.$$

$$\text{Найдём } LB = AB - AL;$$

$$LB = AB - \sqrt{7}(\sqrt{7}-1)/6 * AB = (\sqrt{7} - 1)/6 * AB.$$

$$\text{Найдём } PL = PB - LB;$$

$$PL = 2/3AB - (\sqrt{7}-1)/6 * AB = (5-\sqrt{7})/6 * AB;$$

$$AP = 1/3AB$$

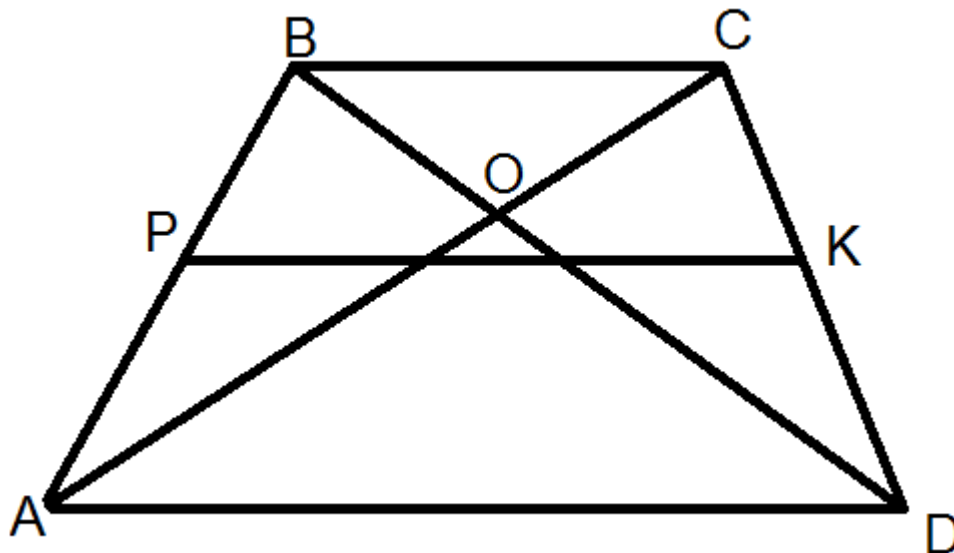
Исходя из всего вышеперечисленного:

$$AP : PL : LB = 2 : (5 - \sqrt{7}) : (\sqrt{7} - 1).$$

$$\text{Ответ: } 2 : (5 - \sqrt{7}) : (\sqrt{7} - 1).$$

5. Дано:

ABCD – трапеция, отрезок PK параллелен основаниям, трапеции APKD и PBCK подобны, Площади треугольников AOD и COB относятся как 81/16. S(APKD) : S(PBCK) - ?



а) Так как треугольники AOD и COB, $(AD/BC)^2 = 81/16$, следовательно $AD/BC = 9/4$.

б) Пусть $AD = 9a$, тогда $BC = 4a$,

так как трапеции APKD и PBCK подобны, то $PK = \sqrt{AD \cdot BC} = \sqrt{9a \cdot 4a} = 6a$.

в) Пусть высота APKD равна x , а PBCK равна y .

Так как $S(ABCD) = S(APKD) + S(PBCK)$, то $(AD+BC)/2 \cdot (x+y) = (AD+PK)/2 \cdot x + (PK+BC)/2 \cdot y$;

$$13a/2 \cdot (x+y) = 15a/2 \cdot x + 10a/2 \cdot y,$$

отсюда $x = 1.5y$, тогда $S(APKD)/S(PBCK) = 15a \cdot 1.5y / 10a \cdot y = 9/4$.

Ответ: 9:4.

Заключение и вывод

В ходе работы над этой темой я выполнил поставленные задачи: изучил специальную литературу и источники в интернете; рассмотрел 4 вида средних величин; дал им определения и формулы; узнал, как они связаны между собой, представил геометрическую интерпретацию этой взаимосвязи на примере трапеции, подобрал и решил задачи, в которых использовались данные понятия, выпустил брошюру с заданиями по теме «Среднее в математике» и провёл урок в 9 классе «Четыре классические средние в трапеции».

Проделанная работа позволила мне не только значительно увеличить теоретические знания о классических средних, но и научиться решать задачи, которые могут встретиться на экзаменах ОГЭ и ЕГЭ. Материалы работы и брошюра могут быть использованы на факультативных и элективных занятиях по математике, а также будут полезны тем, кто хочет больше узнать, чем написано в учебнике. В дальнейшем я планирую дальше работать с этой темой и рассмотреть неравенства, связывающие средние величины в разрезе алгебры и сделать подборку задач математических олимпиад, в которых применялись замечательные неравенства о средних.

Список литературы

1. Александров А.Д. Геометрия. Учебное пособие для 8 — 9 классов с углубленным изучением математики-М.: Просвещение, 2014
2. Атанасян Л. С. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику: учебное пособие-М.: Просвещение, 2021
- 3.Блинков А. Д. Классические средние в арифметике и геометрии-М.: Издательство МНЦМО, 2013. Серия «Школьные математические кружки». Выпуск 07
4. Сайт - <https://ru.wikipedia.org/wiki/>.
5. Кеткина О.С. Статистика: Сборник заданий с примерами решений и пояснением, Издательство Екатеринбург, 2019г
6. Шень А.Х. Дюжина задач о среднем арифметическом. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», N6, 2018.