СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ В МАТЕМАТИКЕ

Мишин Анатолий Вячеславович
Обучающийся ГБОУ МО «Одинцовский «Десятый лицей»
Научный руководитель: **Стрельникова Ирина Анатольевна**
учитель математики, ГБОУ МО «Одинцовский «Десятый лицей»

Аннотация: Область применения средних величин в математике очень велика: олимпиады редко обходятся без такого типа задач, особенно те, при прохождении которых вы получаете дополнительные баллы для дальнейшего обучения в ВУЗе.

Ключевые слова:средняя величина, геометрическая интерпретация,трапеция

AVERAGES IN MATHEMATICS

Mishin Anatoly Vyacheslavovich

Scientific adviser:

Strelnikova Irina Anatolyevna

Abstract: The scope of application of averages in mathematics is very wide: Olympiads are rarely complete without this type of problem, especially those that, when passed, give you additional points for further study at a university.

Key words: average value, geometric interpretation, trapezoid

Введение и обоснование выбора темы

Школьная программа по математике включает в себя лишь малую часть понятий о средних величинах. Поэтому, однажды услышав на уроках алгебры и геометрии о среднем арифметическом, среднем геометрическом, а также, что есть еще и другие средние, захотелось узнать о них больше. Тем более, что очень часто эти понятия встречаются в задачах более высокого уровня, олимпиадных задачах. Более глубокие знания в этом вопросе не только расширят наш кругозор, но и помогут разобраться в решении многих сложных задач, предлагаемых в олимпиадах, экзаменах. Поэтому я решил взять для подробного рассмотрения именно эту тему.

Область применения средних величин в математике очень велика: олимпиады редко обходятся без такого типа задач, особенно те, при прохождении которых вы получаете дополнительные баллы для дальнейшего обучения в ВУЗе.

Цель исследования: изучить различные виды средних величин и взаимосвязи между ними, выпустить сборник задач по данной теме.

Задачи:

1) провести опрос среди обучающихся 9 классов по теме «Среднее в математике»;

2) рассмотреть виды различных средних в математике;

3) дать определения и формулы, по которым вычисляются различные средние величины;

4) дать геометрическую интерпретацию взаимосвязей различных средних на примере трапеции;

5) решить геометрические задачи, в которых применятся средние величины и их свойства.

6) выпустить брошюру с заданиями по теме «Среднее в математике» и провести урок в 9 классе «Четыре классические средние в трапеции».

В этой теме много неизвестного. В школьном учебнике геометрии отсутствуют эти сведения. Поэтому, я посчитал полезным собрать сведения по данной теме в одной брошюре и подобрать к ним задачи по данной теме.

1.2. Виды средних величин:

1. Среднее арифметическое

- Определение: Средним арифметическим чисел a и b называется их полусумма (a+b)/2.

Свойства среднего арифметического:является средней линией трапеции;

- если a и b увеличить или уменьшить в несколько раз, то и среднее арифметическое увеличится или уменьшится во столько же раз. Аналогично, если a и b увеличить или уменьшить на одну и туже величину, то и среднее арифметическое этих чисел увеличится или уменьшится на столько же;

- Среднее арифметическое положительных чисел a и b расположено между этими числами.

2. Среднее квадратичное

Определение: Средним квадратичным чисел a и b называется число, равное арифметическому квадратному корню из среднего арифметического квадратов чисел a и b:

$\sqrt{((a^2+b^2)/2)}$.

Свойства среднего квадратичного:

- Для любых значений a и b среднее квадратичное чисел больше или равно среднего арифметического этих чисел;

- Если в трапеции провести отрезок, разбивающий её на две равновеликие трапеции, то длина этого отрезка есть среднее квадратичное оснований трапеции.

3. Среднее гармоническое

- Определение: Средним гармоническим для чисел a и b называется число, равное 2ab/(a+b).

Свойства среднего гармонического:среднее гармоническое положительных чисел a и b является наименьшим из всех средних величин;

В трапеции отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей и параллельный основаниям является средним гармоническим для оснований этой трапеции;

- Среднее гармоническое чисел a и b расположено между этими числами.

4. Среднее геометрическое

- Определение: Средним геометрическим для неотрицательных чисел a и b называется число, равное арифметическому квадратному корню из произведения этих чисел:

$\sqrt{ab}$

Свойства среднего геометрического:

- Среднее геометрическое положительных чисел a и b лежит между этими числами;
- Для любых неотрицательных значений a и b среднее геометрическое чисел не больше их среднего арифметического

1.3. Сравнение классических средних

$H \le G \le A \le S$,

Где H – среднее гармоническое,

G – среднее геометрическое,

A – среднее арифметическое,

S – среднее квадратичное.

$2ab/(a+b) \le \sqrt{ab} \le (a+b)/2 \le \sqrt{((a^2+b^2)/2)}$

Равенство в каждом случае достигается тогда и только тогда, когда a = b.

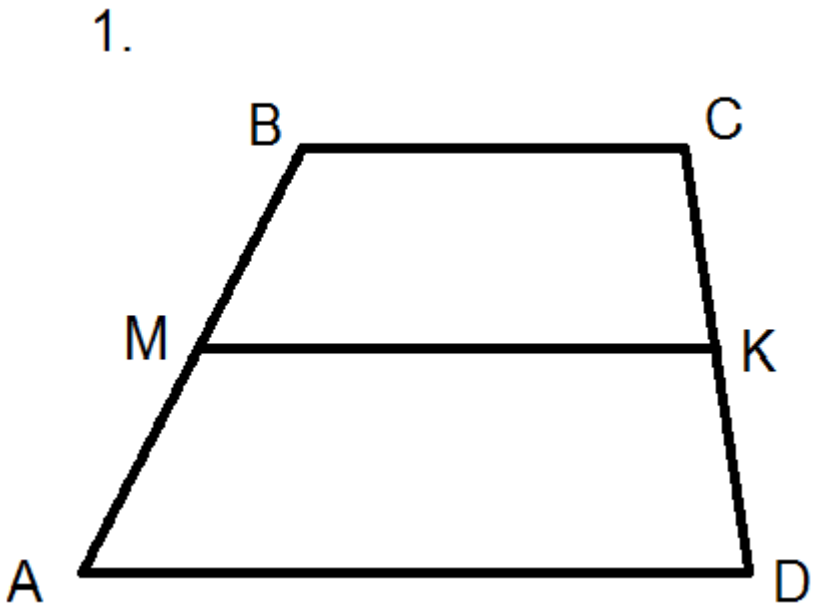
1.4. Четыре классические средние в трапеции

Наиболее интересным мне показался материал, связывающий трапецию со средними величинами. Так же, трапеция обладает свойствами полезными для решения задач повышенной сложности.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в геометрии средние величины.

Дано: трапеция ABCD, BC=a, AD=b.

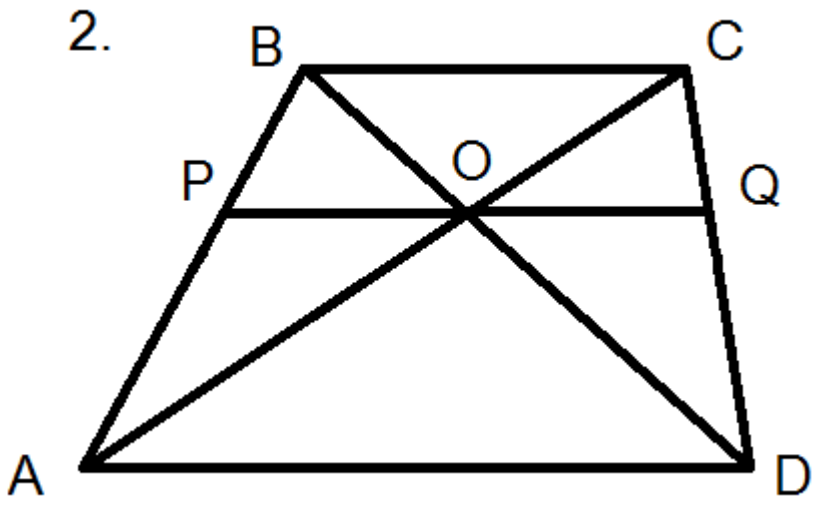
1. рис.1. Проведём отрезок MK – средняя линия, тогда MK=(a+b)/2, следовательно MK – среднее арифметическое a и b.



2. рис.2. Проведём через O отрезок PQ параллельный основаниям ABCD, P и Q лежат на боковых сторонах ABCD.

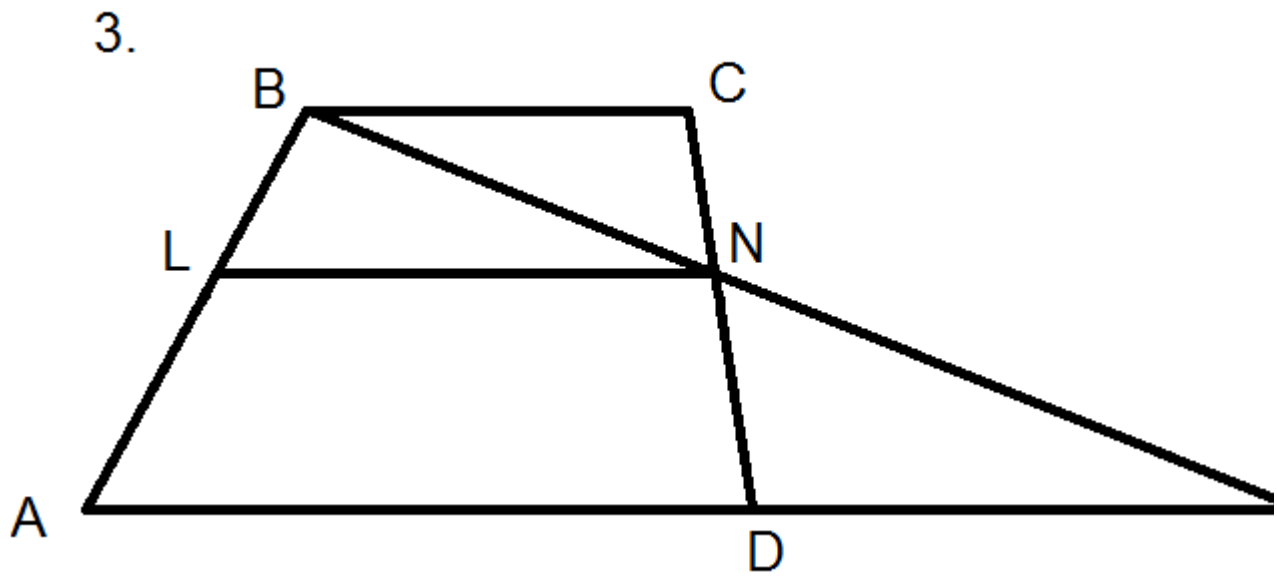
Треугольники AOD и COB подобны, то AO/CO=DO/BO=AD/BC=b/a. Из подобия треугольников APO и ABC,

PO/BC=AO/AC=b/(a+b), аналогично OQ/BC=DO/DB=b/(a+b), таким образом, PO=OQ=ab/(a+b), следовательно PQ=2ab/(a+b) – среднее гармоническое a и b.



3. рис.3. Проведём отрезок LN параллельный основаниям, BL/AL=CN/DN=√a/√b. Проведём луч BN до пересечения с AD в точке T.

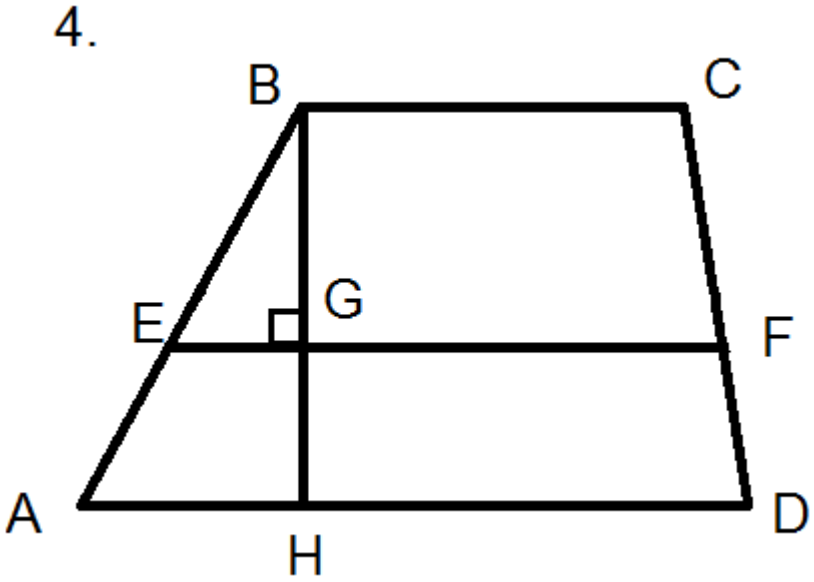
Так как треугольники BNC и TND подобны, то BC/TD=BN/TN=CN/DN=√a/√b, тогда TD=(a√b) / √a=√ab. Так как треугольники LBN и ABT подобны, то LN/AT=BN/BT, следовательно, LN=√a(b+√ab) / (√a+√b) = √ab – среднее геометрическое a и b.



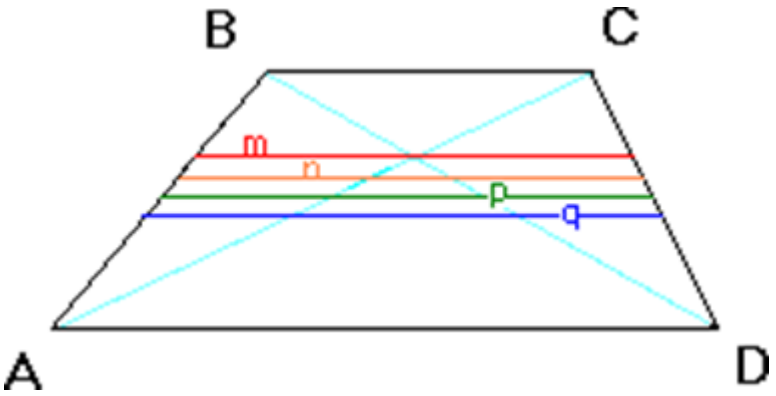
4. рис.4. Проведём отрезок EF, параллельный основаниям, E и F лежат на боковых сторонах, и такой, что трапеции EBCF и AEFD равновелики. Проведём высоту трапеции BH, пересекающую EF в точке G, пусть EF=d,

BH=h, BG=m, GH=n. Тогда m=0.5S(ABCD) / 0.5(a+d)=(a+b)h / 2(a+b) ; n=0.5S(ABCD) / 0.5(b+d)= (a+b)h / 2(b+d).

Так как, h=m+n, то h=(a+b)h / 2(a+b) + (a+b)h / 2(b+d)= 2(a+b)(b+d), следовательно d=√((aˆ2 + bˆ2)/2) - среднее квадратичное a и b.



Итак, подводя итог, можно сказать, что в любой трапеции можно рассматривать 4 отрезка, равные соответственно одной из средних величин в математике.



В трапеции среднее геометрическое оснований трапеции расположено следующим образом, где

m-среднее гармоническое основание;

n-среднее геометрическое;

p- среднее арифметическое;

q- среднее квадратичное.

Следует отметить, что при различных значениях a и b последовательность этого расположения не меняет.

2. Практическое применение классических средних в задачах.

2.1. Примеры задач

В трапеции отрезок, соединяющий боковые стороны, проходит через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям. Площади треугольников с вершинами в точке пересечения и основаниями, равными основаниям трапеции, относятся как 9: 1. Найдите отношение площадей трапеций, на которые делит исходную трапецию данный отрезок.

Два отрезка, параллельных основаниям трапеции, соединяют боковые стороны и равны 1,75 и 5 соответственно. Один из них проходит через точку пересечения диагоналей, а второй делит трапецию на две равные по площади трапеции. Найдите отношение отрезков боковой стороны, на которую делят её два данных отрезка.

В трапеции проведены два отрезка, параллельных основаниям. Один проходит через точку пересечения диагоналей и равен 1,6, а второй делит трапецию на две подобные и равен 2. Найдите отношение отрезков боковой стороны, на которые её делят два исходных отрезка.

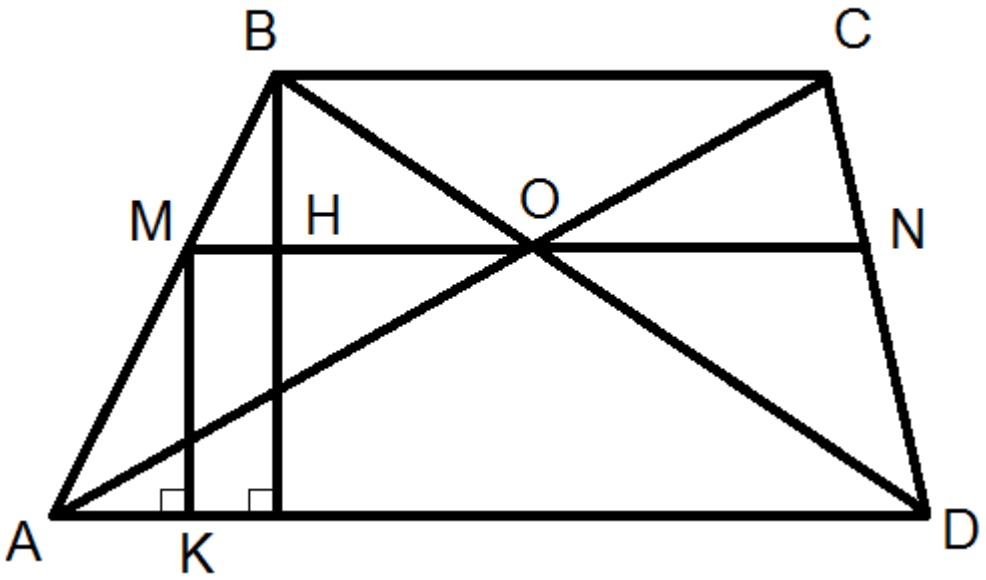
В трапеции проведены два отрезка, параллельных основаниям и соединяющих боковые стороны. Один делит трапецию на две подобные трапеции и равен $\sqrt{7}$, а второй делит трапецию на две трапеции, равные по площади, и равен 5.

В трапеции точка пересечения диагоналей является вершиной двух треугольников, площади которых относятся как 81: 16, и основания которых являются основаниями трапеции. Найдите отношение площадей подобных трапеций, образованных отрезком, параллельным основанию.

2.2. Решение задач

1. Дано:

ABCD – трапеция, BC и AD – основания, PK параллелен основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей, O – точка пересечения диагоналей, площади треугольников AOD и BOC относятся как 9:1. S(AMND) : S(MACN) - ?



а) Треугольники BOC и AOD подобны по двум углам, значит AD/BC=AO/OC=OD/OB.

б) Так как площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных сторон, тогда

$S(AOD)/S(BOC) = (AD/BC)^2$, значит $(AD/BC)^2 = 9/1$, AD = 3BC.

MN – среднее гармоническое оснований трапеции ABCD,

MN = 2AD*BC/(AD+BC) = 2BC*3BC/(3BC+BC) = 3BC/2.

в) Пусть q = MQ – высота трапеции AMND,

h = BK – высота трапеции MBCN.

q/h = AD/BC = 3/1, q = 3h.

г) S(AMND) = (AD+MN)/2 *q = (3BC+3BC/2)/2 *3h = 27BC/4 *h;

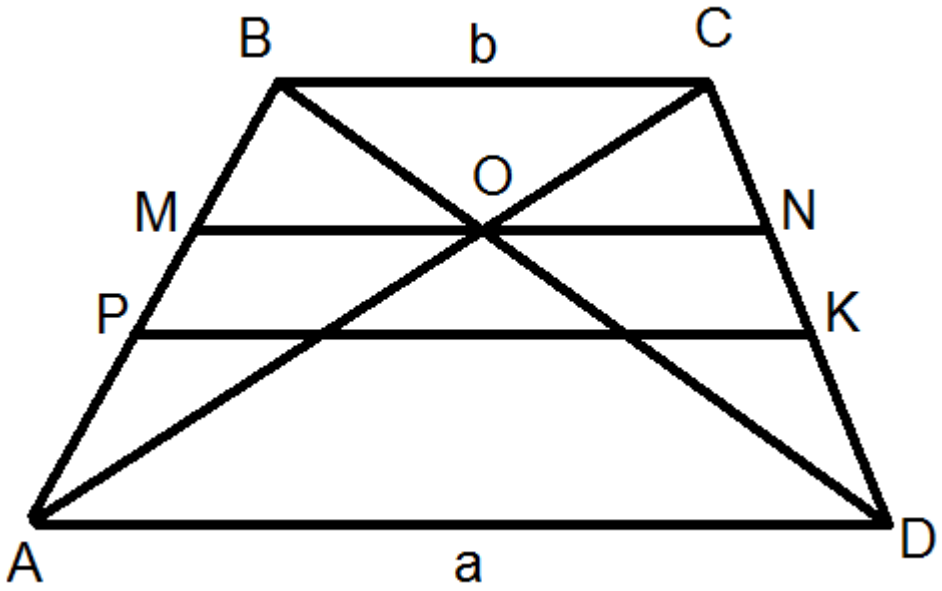
S(MBCN) = (MN+BC)/2 *h = (3BC/2+BC)/2 *h = 5BC/4 *h.

S(AMND)/S(MBCN) = (27BC/4 *h)/(5BC/4 *h) = 27/5.

Ответ: 27:5.

2. Дано:

ABCD – трапеция, MN и PK – параллельны основаниям, MN=1,75, PK=5, площади APKD и PBCK равны, MN проходит через O – точка пересечения диагоналей. AP : PM : MB - ?



а) Пусть AD=a, BC=b тогда MN = 2ab/(a+b) , PK = $\sqrt{(a^2+b^2)}/2$.

Составим систему из которой мы получим, что

$a^2+b^2+2ab = 50+7/4(a+b)$;

$(a+b)^2-7/4(a+b)-50=0$; замена a+b=t,

$4t^2 - 7t - 200 = 0$, отсюда a+b=8, ab=7, следовательно a=7, b=1.

б) Рассмотрим треугольники MBO и ABD- эти треугольники подобны, тогда BM/OM=AB/AD, значит BM/AB=1/8 или BM=1/8AB.

в) Пусть BH перпендикулярен AD. Рассмотрим треугольники ABH и PBQ: PB/AP=BQ/HQ.

S(APKD)= (AD+PK)/2*HQ=6HQ;

S(PBCK)= (PK+BC)/2*BQ=3HQ.

Так как эти площади равны из условия получим, что BQ=2HQ.

Значит PB/AP=2/1, PB=2AP, AB=3AP, из этого следует что PB=2/3AB, AP=1/3AB.

Так как BM=1/8AB, а AP=1/3AB, то PM=AB – 1/8AB – 8/24AB=13/24AB.

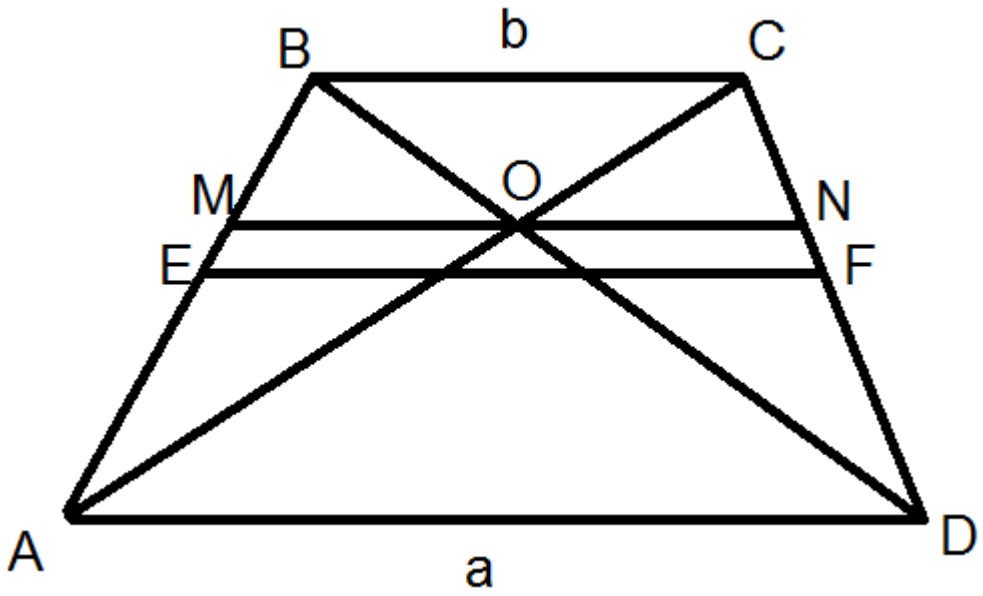
Тогда AP:PM:MB = 8:13:3

Ответ: 8:13:3.

3.Дано:

ABCD – трапеция, AB пересекается с BD в точке O, PK и LF параллельны основаниям, PK=1.6, LF=2,трапеции LBCF и ALFD подобны.

AE : EM : MB - ?



а) Пусть BC=b, AD=a .

Тогда MN=2ab/(a+b)=1.6; EF=√ab=2;

Составим систему уравнений, из нее получим, что a+b=5, ab=4,

Следовательно a=4, b=1.

б) Трапеции AEFD и EBCF подобны, проведём высоту BH.

BH пересекает EF в точке K.

S(AEFD)= (AD+EF)/2*HK=3HK;

S(EBCF)=(EF+BC)/2*KB=3/2KB;

S(ABCD)=(AD+BC)/2*(HK+KB)=2.5HK+2.5KB.

S(AEFD)+S(EBCF)=S(ABCD), значит 3HK+1.5KB=2.5HK+2.5BK;

Следовательно HK=2BK.

По теореме Фалеса EB/AE=BK/HK=1/2.

Значит AE=2/3AB и EB=1/3AB.

в) Также известно ,что BM/AB=OM/AD, следовательно BM=1/5AB.

AE=2/3AB, EB=1/3AB, BM=1/5AB.

EM = AB – AE – BM = AB – 10/15AB – 3/15AB = 2/15AB.

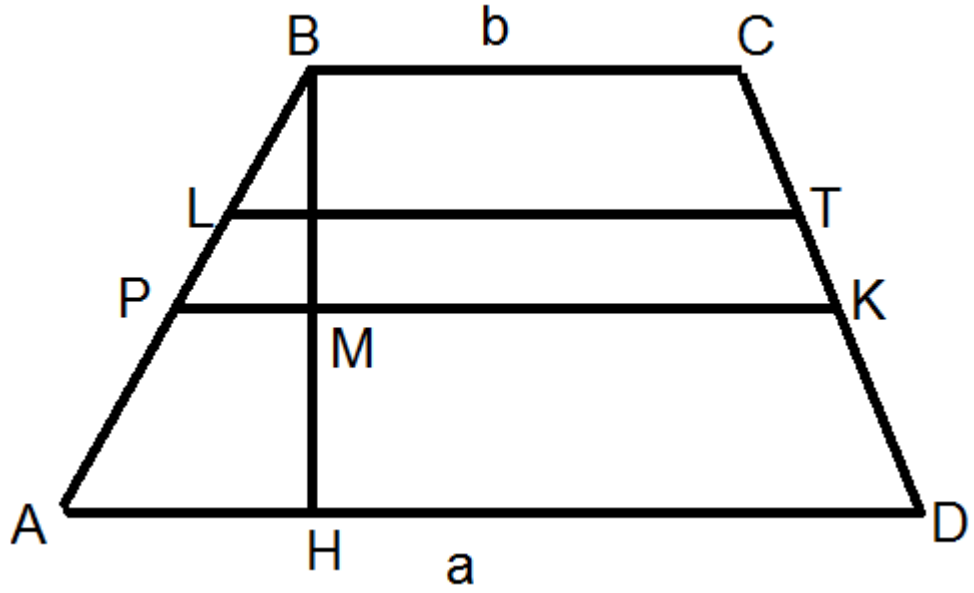
В итоге AE:EM:MB = 10:2:3

Ответ: 10:2:3.

4.Дано:

ABCD – трапеция, BC и AD – основания, отрезки LT и PK параллельны основаниям, трапеции ALTD и LBCT подобны, площади трапеций APKD и PBCK равны, LT=√7, PK=5.

AP : PL : LB - ?



а) Пусть AD=a, BC=b;

PK = √(a²+b²)/2, LT = √ab, можно составить систему, из которой получим, что (a+b)² = 64, ab = 7.

Так как a и b > 0, то a+b=8, ab=7;

a = 7, AD = 7

b = 1 BC = 1.

б)Проведём высоты BH к основанию AD.

S(APKD) = (AD+PK)/2 *MH = 6MH,

S(PBCK) = (PK+BC)/2 *MB = 3MB,

S(ABCD) = (AD+BC)/2 *HB = 4HB.

Тогда S(ABCD) = S(APKD) + S(PBCK);

4HB = 6MH + 3MB, так как HB = MB + MH, то

4MB + 4MH = 6MH + 3MB

MB = 2MH.

MB/BH = MB/(MH+HB) = 2MB/3MB = 2/3,

значит PB = 2/3AB, AP = 1/3AB.

в) Так как трапеция ALTD подобна LBCT, то

LB/AL = LT/AD = √7/7, но AL+LB=AB, LB=√7AB/7, следовательно AB = AL + √7AL/7.

Отсюда AL = (7 - √7)/6 *AB.

Найдем LB = AB – AL;

LB = AB - √7(√7-1)/6 * AB = (√7 – 1)/6 *AB.

Найдём PL = PB – LB;

PL = 2/3AB – (√7-1)/6 *AB = (5-√7)/6 *AB;

AP = 1/3AB

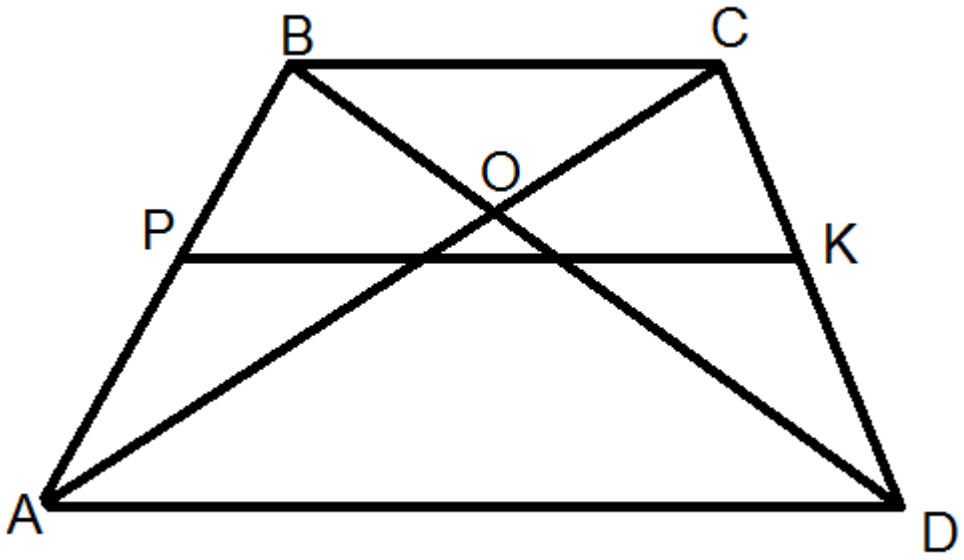
Исходя из всего вышеперечисленного:

AP : PL : LB = 2 : (5 - √7) : (√7 – 1).

Ответ: 2 : (5 - √7) : (√7 – 1).

5.Дано:

ABCD – трапеция, отрезок PK параллелен основаниям, трапеции APKD и PBCK подобны, Площади треугольников AOD и COB относятся как 81/16. S(APKD) : S(PBCK) - ?



а) Так как треугольники AOD и COB, $(AD/BC)^2=81/16$, следовательно AD/BC=9/4.

б) Пусть AD = 9a, тогда BC = 4a,

так как трапеции APKD и PBCK подобно, то PK = √AD*BC = √9a*4a = 6a.

в) Пусть высота APKD равна x, а PBCK равна y.

Так как S(ABCD) = S(APKD) + S(PBCK), то (AD+BC)/2*(x+y) = (AD+PK)/2*x + (PK+BC)/2*y;

13a/2*(x+y) = 15a/2*x + 10a/2*y,

отсюда x = 1.5y, тогда S(APKD)/S(PBCK) = 15a*1.5y/10a*y = 9/4.

Ответ: 9:4.

Заключение и вывод

В ходе работы над этой темой я выполнил поставленные задачи: изучил специальную литературу и источники в интернете; рассмотрел 4 вида средних величин; дал им определения и формулы; узнал, как они связаны между собой, представил геометрическую интерпретацию этой взаимосвязи на примере трапеции, подобрал и решил задачи, в которых использовались данные понятия, выпустил брошюру с заданиями по теме «Среднее в математике» и провёл урок в 9 классе «Четыре классические средние в трапеции.

Проделанная работа позволила мне не только значительно увеличить теоретические знания о классических средних, но и научиться решать задачи, которые могут встретиться на экзаменах ОГЭ и ЕГЭ. Материалы работы и брошюра могут быть использованы на факультативных и элективных занятиях по математике, а также будут полезны тем, кто хочет больше узнать, чем написано в учебнике. В дальнейшем я планирую дальше работать с этой темой и рассмотреть неравенства, связывающие средние величины в разрезе алгебры и сделать подборку задач математических олимпиад, в которых применялись замечательные неравенства о средних.

Список литературы

1. Александров А.Д. Геометрия. Учебное пособие для 8 — 9 классов с углубленным изучением математики-М.: Просвещение, 2014

2. Атанасян Л. С. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику: учебное пособие-М.: Просвещение, 2021

3.Блинков А. Д. Классические средние в арифметике и геометрии-М.: Издательство МНЦМО, 2013. Серия «Школьные математические кружки». Выпуск 07

4. Сайт - https://ru.wikipedia.org/wiki/.

5. Кеткина О.С. Статистика: Сборник заданий с примерами решений и пояснением, Издательство Екатеринбург, 2019г

6. Шень А.Х. Дюжина задач о среднем арифметическом. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», N6, 2018.