Сведения разных форм представления многомерных сингулярных интегралов друг к другу

Джуракулов Рахматжан Кандидат физика-математических наук, доцент кафедры высшей математики и информационной технологии Андижанского сельскохозяйственного института, Узбекистан.

Эгамбердиева Барнахон Гулямджановна Ассистент кафедры высшей математики и информационной технологии Андижанского сельскохозяйственного института, Узбекистан.

Захидов Дильшад Гулямджанович Ассистент кафедры высшей математики и информационной технологии Андижанского сельскохозяйственного института, Узбекистан.

Многие задачи механики, теория аналитических функций, математической физики и т.д. тесно связано с многомерными сингулярными интегральными уравнениями [1] Из чего следует необходимость разработки приближённых методы для вычисления многомерных сингулярных интегралов. Этим вопросом активно и плодотворно занимался Б.Г.Габдулхаев (см.напр. [2]И естественно интересен вопрос о том, какая существует связь между разными формами сингулярных интегралов таких как, например, интегралы с ядрами типа Коши, типа Гильберта и типа

$$\Phi(x) = \iint\limits_S \frac{M(x,y)}{r^2}\varphi(y)\,dy,$$

где и - вектор функции, а некоторая матрица, если , то

этот интеграл является сингулярным.

С этой целью в этой работе мы пытались изучить этот вопрос на примере следующего интеграла.

$$Vf = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(X,\theta)}{r^2} f(y_1,y_2)dy_1dy_2, \qquad (1)$$

где

$$\theta = \frac{Y-X}{\|Y-X\|}$$

Если

$$\varphi(X,\theta) = b(X)\theta = \frac{Y-X}{\|Y-X\|}b(X),$$

то интеграл (1) примет вид:

$$Vf = b(X)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y-X}{\|Y-X\|}\frac{f(y_1,y_2)}{\|Y-X\|^2}dy_1dy_2,$$

и

$$(Vf)_1 = b(x_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \frac{f(y_1, y_2)}{r^2} dy_1 dy_2, \qquad (2)$$

(2)

$$(Vf)_2 = b(x_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_2 - x_2}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \frac{f(y_1, y_2)}{r^2} dy_1 dy_2. \qquad (3)$$

(3)

В последних интегралах приведем замену

$$y_1 = i\frac{1+t_1}{1-t_1},\ y_2 = i\frac{1+t_2}{1-t_2}, x_1 = i\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1},\ \ x_2 = i\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}$$

после чего имеем

$$(Vf)_1 = -4b\left(i\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right) \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}}{\sqrt{\left(\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{1+t_2}{1-t_2} - \frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}} \times$$

$$\times \frac{f\left(i\frac{1+t_1}{1-t_1}, i\frac{1+t_2}{1-t_2}\right)}{\left[\left(\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{1+t_2}{1-t_2} - \frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2\right]} \frac{dt_1 dt_2}{(1-t_1)^2(1-t_2)^2}$$

или

$$(Vf)_1 = -4b\left(i\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right) \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}}{\sqrt{\left(\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{1+t_2}{1-t_2} - \frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}} \frac{dt_1 dt_2}{(t_1 - \tau_1)(t_2 - \tau_2)} \times$$

$$\times \frac{f\left(i\frac{1+t_1}{1-t_1}, i\frac{1+t_2}{1-t_2}\right)(t_1 - \tau_1)(t_2 - \tau_2)}{\left[\left(\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{1+t_2}{1-t_2} - \frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2\right](1-t_1)^2(1-t_2)^2} \frac{dt_1 dt_2}{(t_1 - \tau_1)(t_2 - \tau_2)}, \qquad (4)$$

где - единичные окружности.

Рассмотрим теперь величины

$$\frac{y_1 - x_1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \qquad (5)$$

$$\frac{y_2 - x_2}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \qquad (6)$$

из подынтегральных выражений (2) и (3).

Они являются ограниченными величинами, то есть можно показать, что

$$\frac{|y_1 - x_1|}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \le 1,$$

$$\frac{|y_2 - x_2|}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \le 1.$$

Кроме того, если одним и тем же законом и , то (5) и (6) стремятся к одному и тому же пределу .

Аналогичные рассуждения имеют места и относительно следующих величин:

$$\frac{\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}}{\sqrt{\left(\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{1+t_2}{1-t_2} - \frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}}, \quad \frac{t_1 - \tau_1}{\sqrt{\left(\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{1+t_2}{1-t_2} - \frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}}$$

и

$$\frac{t_2 - \tau_2}{\sqrt{\left(\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{1+t_2}{1-t_2} - \frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2}}$$

Введя обозначения

$$b\left(i\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right) = b_1(\tau_1),$$

$$g_1(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) = \frac{4\left(\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)(t_1 - \tau_1)(t_2 - \tau_2) f\left(i\frac{1+t_1}{1-t_1}, i\frac{1+t_2}{1-t_2}\right)}{\left[\left(\frac{1+t_1}{1-t_1} - \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{1+t_2}{1-t_2} - \frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2\right]^{3/2} (1-t_1)^2(1-t_2)^2},$$

из (4) имеем

$$(Vf)_1 = b_1(\tau_1) \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{g_1(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) dt_1 dt_2}{(t_1 - \tau_1)(t_2 - \tau_2)}, \qquad (7)$$

Аналогичным путем получаем, что

$$(Vf)_2 = b_2(\tau_2) \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{g_2(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) dt_1 dt_2}{(t_1 - \tau_1)(t_2 - \tau_2)}, \qquad (8)$$

где

$$b_2(\tau_2) = b\left(i\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right),$$

$$g_2(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)=\frac{4\left(\frac{1+t_2}{1-t_2}-\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)(t_1-\tau_1)(t_2-\tau_2)f\left(i\frac{1+t_1}{1-t_1},i\frac{1+t_2}{1-t_2}\right)}{\left[\left(\frac{1+t_1}{1-t_1}-\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right)^2+\left(\frac{1+t_2}{1-t_2}-\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}\right)^2\right]^{3/2}(1-t_1)^2(1-t_2)^2}.$$

Таким же образом можно установить связь между интегралами вида (7) и (8) и сингулярными интегралами с ядром Гильберта.

Литература:

1. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз,1968.
2. Б.Г.Габдулхаев. Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов. Изв. Вузов, Математика, 1975, №4.