

Краевая задача для уравнения гиперболо-параболического типа четвертого порядка

А. М. Шхагапсоев

ФГБНУ «Институт прикладной математики и автоматизации»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89-а
E-mail: ipma@niipma.ru

Аннотация: Рассматривается краевая задача для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа четвертого порядка. В гиперболической части найдено решение в явном виде, а в параболической части решение уравнения выписывается с помощью функции Грина первой краевой задачи. В линии соприкосновения $y=0$ получено обыкновенная дифференциальная уравнения третьего порядка, решая которого получаем граничное условие устраняющее некорректность задачи.

Ключевые слова: Уравнения смешанного типа четвертого порядка; локальная краевая задача; линеаризованное уравнение Кортевега-де-Фриза; функция Грина.

В настоящее время теория краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Различные краевые задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка исследовались в работах [1-3].

При изучении волн поперечного колебания стержня [4], [5, с. 277] или при колебании балки [6, с. 289] возникают различные уравнения четвертого порядка. На важность подобных исследований в теории уравнений смешанного типа указывал А.В. Бицадзе. В качестве модельного уравнения четвертого порядка им было предложено уравнение [7]:

$$u_{xxxx} - 2\text{Sign}(y)u_{xxxy} + u_{yyyy} = 0.$$

В данной работе рассматривается уравнение

$$\begin{cases} u_y + \beta u_{xxx} + \gamma u_x = 0, & y > 0, \\ u_{xxxx} - 2\alpha u_{xxxy} + \alpha^2 u_{yyyy} = 0, & y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в конечной области $D = D_1 \cup D_2 \cup A_0B_0$; $D_1 = \{(x, y): 0 < x < r, 0 < y < h\}$; D_2 — треугольник с вершинами

$$A_0(0,0), B_0(r,0) \text{ и } C\left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2\sqrt{\alpha}}\right); A_0B_0 = \{(x, y): 0 < x < r, y = 0\};$$

$$-\beta, \gamma, \alpha = \text{const} > 0.$$

Определение. Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u = u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^4(D_2)$, $u_{xxx}(x, y)$, $u_y \in C(D_1)$, $u_x \in C(\bar{D}_1)$, удовлетворяющую уравнению (1).

Задача. Найти регулярное в области D решение $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u_{xx}(r, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_2(x), \quad 0 < x < r, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{x+r}{2}, -\frac{x-r}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_3(x), \quad 0 < x < r, \quad (6)$$

где n — внутренняя нормаль; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ — заданные функции и выполняются

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2(r) = \psi_2(0).$$

условия согласования:

Уравнение (1) в области D_2 можно свести к системе уравнений

$$\begin{cases} u_{xx} - au_{yy} = \Phi(x, y), \\ \Phi_{xx} - a\Phi_{yy} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Из краевых условий (5) и (6) для $\Phi(x, y)$ получаем следующее:

$$\Phi\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \sqrt{2}\psi_2(x), \quad 0 < x < r, \quad (8)$$

$$\Phi\left(\frac{x+r}{2}, \frac{x-r}{2\sqrt{a}}\right) = -\sqrt{2}\psi_3(x), \quad 0 < x < r. \quad (9)$$

Решение задачи Гурса (8), (9) для уравнения

$$\Phi_{xx} - a\Phi_{yy} = 0 \quad (10)$$

имеет вид

$$\Phi(x, y) = \sqrt{2} [\psi_2(x - \sqrt{a}y) - \psi_3(x + \sqrt{a}y) - \psi_2(r)] \quad (11)$$

Известно, что решение уравнения

$$u_{xx} - au_{yy} = \Phi(x, y) \quad (12)$$

представимо в виде:

$$2u(x, y) = \tau(x + \sqrt{a}y) + \tau(x - \sqrt{a}y) + \int_{x-\sqrt{a}y}^{x+\sqrt{a}y} \nu(t) dt - \Phi_1(x, y), \quad (13)$$

$$\tau(x) = \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y),$$

$$\nu(x) = \lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y)$$

— пока неизвестные функции, а

$$\Phi_1(x, y) = \int_0^y \int_{x-\sqrt{ay+t}}^{x+\sqrt{ay+t}} \Phi(x, y) d\xi d\eta.$$

Используя условие (4), из (10) получим следующее соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau(x) - \int_0^y \nu(t) dt = \alpha(x), \quad (14)$$

где $\alpha(x) = 2\psi_1(x) + 2\Phi_1(x, -x) - \psi_1(0)$

— известная функция.

В области D_1 переходя к пределу $y \rightarrow 0$ в уравнении (1), получим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, в виде

$$\beta \tau'''(x) + \gamma \tau'(x) = \nu(x). \quad (15)$$

Решая систему уравнений (14) и (15) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\beta \tau'''(x) + (\gamma+1) \tau'(x) = \alpha'(x) \quad (16)$$

с граничными условиями

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau'(0) = \varphi_2(0), \quad \tau''(r) = \varphi_3(0). \quad (17)$$

С помощью условий (17) уравнение (16) сводится к интегральному уравнению

$$\tau(x) = \lambda \int_0^x (x-t) \tau(t) dt + \alpha_1(x) + \frac{\tau''(0)x^2}{2}, \quad (18)$$

$$\lambda = \frac{\gamma+1}{\beta}, \quad \alpha_1(x)$$

$$= \varphi_1(0) + \varphi_2(0)x + \int_0^x \frac{x-t}{\beta} \alpha(t) dt + \frac{(a+1)\varphi_1(0) - \psi_1(0)}{2\beta} x^2.$$

где

Обращая интегральное уравнение (18) используя условие (17) имеем

$$\tau(x) = A(x) + \left[-\sqrt{-\lambda} \varphi_1(0) \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda} r \varphi_1(0)) + c \right] B(x), \quad (19)$$

где

$$c = -\frac{\alpha(r) + a\varphi_1(0)}{\beta} - \varphi_3(0),$$

$$A(x) = \alpha_1(x) - \sqrt{-\lambda} \int_0^x \operatorname{sh}[\sqrt{-\lambda}(x-t)] \alpha_1(t) dt,$$

$$B(x) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{2} \int_0^x \operatorname{sh}[\sqrt{-\lambda}(x-t)] t^2 dt + \frac{x^2}{2}.$$

Далее рассмотрим уравнение (1) в параболической части.

Замена функции $u(x, y) = v(x, y)e^{Ny}$, где $N = \text{const}$ в уравнении (1) при $y > 0$ приводит к следующему виду

$$v_y + \beta v_{xxx} + \gamma v_x + Nv = 0. \quad (20)$$

Рассмотрим тождество

$$v[v_y + \beta v_{xxx} + \gamma v_x + Nv] = 0. \quad (21)$$

Проделив некоторые преобразования из (21) получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\beta \left(vv_{xx} + \frac{\gamma v_x^2}{2} \right) + \frac{\gamma v^2}{2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{v^2}{2} \right] + Nv^2 = 0. \quad (22)$$

Интегрируя (22) по области

$$D_{1\varepsilon} = \{(x, y): \varepsilon < x < r - \varepsilon, \varepsilon < y < h - \varepsilon, 0 < \varepsilon < \min\{r, h\}\},$$

и применяя, формулу Грина получаем

$$\begin{aligned} & \iint_{D_{1\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta \left(vv_{xx} - \frac{v_x^2}{2} \right) + \gamma \frac{v^2}{2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{v^2}{2} \right] + Nv^2 \right\} dx dy + \\ & \quad + \iint_{D_{1\varepsilon}} v^2(\xi, t) d\xi dt = 0. \\ & \int_{\Gamma_{1\varepsilon}} \left[\beta \left(vv_{xx} - \frac{v_x^2}{2} \right) + \gamma \frac{v^2}{2} \right] dy - \int_{\Gamma_{1\varepsilon}} \left[-\frac{v^2}{2} \right] dx + N \iint_{D_{1\varepsilon}} v^2(\xi, t) d\xi dt = 0. \end{aligned}$$

где $\Gamma_{1\varepsilon}$ граница области $D_{1\varepsilon}$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ перепишем последнее в виде

$$\begin{aligned}
& N \iint_{D_1} v^2(\xi, t) d\xi dt + \int_0^r v^2(x, h) dx + \int_0^r v^2(x, 0) dx \\
& + \int_0^h \left[\beta \left(v(r, y) v_{xx}(r, y) - \frac{v_x^2(r, y)}{2} \right) + \gamma \frac{v^2(r, y)}{2} \right. \\
& \left. - \beta \left(v(0, y) v_{xx}(0, y) - \frac{v_x^2(0, y)}{2} \right) - \gamma \frac{v^2(0, y)}{2} \right] dy = 0
\end{aligned}$$

Учитывая однородность условий (2), (13) и (18) получаем следующее равенство в виде

$$\begin{aligned}
N \iint_{D_1} v^2(\xi, t) d\xi dt + \int_0^r v^2(x, h) dx - \int_0^r v^2(x, 0) dx - \beta \int_0^h v_x^2(r, y) dy + \\
+ \gamma \int_0^h v^2(r, y) dy = 0. \quad (23)
\end{aligned}$$

Докажем сначала, что $u(x, 0) = v(x, 0) = \tau(x)$, если $\tau(0) = \tau'(0) = \tau''(r) = 0$.

Общее решение соответствующего дифференциального уравнения (16) имеет вид

$$\tau(x) = C_1 + C_2 \exp(-\sqrt{-\lambda}x) + C_3 \exp(\sqrt{-\lambda}x). \quad (24)$$

Подставляя однородные граничные условия в общее решение, получим систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_1, C_2, C_3 в виде

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_2 - C_3 = 0 \\ C_3 \operatorname{sh}(r\sqrt{-\lambda}) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Решая систему (25), находим $\tau(x) = v(x, 0) \equiv 0$. С учетом этого, выражение (23) примет вид

$$N \iint_{D_1} v^2(\xi, t) d\xi dt + \int_0^r v^2(x, h) dx - \beta \int_0^h v_x^2(r, y) dy + \gamma \int_0^h v^2(r, y) dy = 0. \quad (26)$$

Число N выбираем так, чтобы левая часть уравнения (26) стало больше либо равно нулю. Тогда при $-\beta, \gamma > 0$ следует, что $u(x, y) = v(x, y) \equiv 0$.

Из этого следует, что исходная задача не может иметь более одного решения в области D_1 и соответственно в области D

Теперь перейдем непосредственно к нахождению решения в области D_1 .

С помощью замены переменной

$$\xi = \frac{x}{\sqrt[3]{-\beta}} \quad (27)$$

уравнение (1) в области D_1 можно свести к более известному уравнению

$$u_y - u_{\xi\xi\xi} = \gamma_1 u_\xi, \quad (28)$$

рассмотренное в монографии [8].

Литература

1. Елеев В.А. Краевые задачи для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа третьего порядка // Нелинейные эволюционные уравнения в прикладной задаче. Киев, 1991. С. 36 — 38
2. Елеев В.А. Об одной задаче с нелокальным сдвигом для уравнения смешанного типа третьего порядка // Материалы второго Международного Российско — Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик, 2011. С. 69 — 71.
3. Елеев В. А., Кумыкова С. К. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2010. № 5. С. 5-14.
4. Виноградова М. В., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1990. — 432с.
5. Релей Л. А. Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1940. — 499с.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: ГИФМЛ, 1959. — 440с.
7. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: АН СССР, 1959. — 164с.
8. Джурев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979. — 230с.