Краевая задача для уравнения гиперболо-параболического типа четвертого порядка

А. М. Шхагапсоев
ФГБНУ «Институт прикладной математики и автоматизации»
360000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89-а
E-mail: ipma@niipma.ru

Аннотация: *Рассматривается краевая задача для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа четвертого порядка. В гиперболической части найдено решение в явном виде, а в параболической части решение уравнения выписывается с помощью функции Грина первой краевой задачи. В линии соприкосновения y=0 получено обыкновенная дифференциальная уравнения третьего порядка, решая которого получаем граничное условие устраняющее некорректность задачи.*

Ключевые слова: *Уравнения смешанного типа четвертого порядка; локальная краевая задача; линеаризованное уравнение Кортевега-де-Фриза; функция Грина.*

В настоящее время теория краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Различные краевые задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка исследовались в работах [1-3].

При изучении волн поперечного колебания стержня[4], [5, с. 277] или при колебании балки [6, с. 289] возникают различные уравнения четвертого порядка. На важность подобных исследований в теории уравнений смешанного типа указывал А.В. Бицадзе. В качестве модельного уравнения четвертого порядка им было предложено уравнение [7]:

$$u_{xxxx} - 2Sign(y)u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0.$$

В данной работе рассматривается уравнение

$$\begin{cases} u_y + \beta u_{xxx} + \gamma u_x = 0, & y > 0, \\ u_{xxxx} - 2au_{xxyy} + a^2 u_{yyyy} = 0, y < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

в конечной области $D = D_1 \cup D_2 \cup A_0B_0;\ D_1 = \{(x,y): 0 < x < r, 0 < y < h\};$ D_2 — треугольник с вершинами

$$A_0(0,0), B_0(r,0) \text{ и } C\left({}^{r}/_{2}, -{}^{r}/_{2\sqrt{a}}\right); A_0B_0 = \{(x,y): 0 < x < r, y = 0\};$$

$$-\beta, \gamma, a = const > 0.$$

Определение. Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u = u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^4(D_2), u_{xxx}(x,y),\ u_y \in C(D_1), u_x \in C(\overline{D_1}),$ удовлетворяющую уравнению (1).

Задача. Найти регулярное в области D решение $u = u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ \ u_x(0,y) = \varphi_2(y),\ \ 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u_{xx}(r,y) = \varphi_3(y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{3}$$

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_1(x), \qquad 0 \le x \le r, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_2(x), \qquad 0 < x < r, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{x+r}{2}, -\frac{x-r}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_3(x), \qquad 0 < x < r, \tag{6}$$

где *n* — внутренняя нормаль; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ — заданные функции и выполняются условия согласования: $\varphi_1(0) = \psi_1(0),\ \psi_2'(r) = \psi_3'(0).$

Уравнение (1) в области D_2 можно свести к системе уравнений

$$\begin{cases} u_{xx} - a u_{yy} = \Phi(x,y), \\ \Phi_{xx} - a\Phi_{yy} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Из краевых условий (5) и (6) для Ф(x,y) получаем следующее:

$$\Phi\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \sqrt{2}\,\psi_2'(x), \qquad 0 < x < r, \tag{8}$$

$$\Phi\left(\frac{x+r}{2}, \frac{x-r}{2\sqrt{a}}\right) = -\sqrt{2}\,\psi_3'(x), \qquad 0 < x < r. \tag{9}$$

Решение задачи Гурса (8), (9) для уравнения

$$\Phi_{xx} - a\Phi_{yy} = 0 \tag{10}$$

имеет вид

$$\Phi(x,y) = \sqrt{2}\left[\psi_2'\left(x - \sqrt{a}y\right) - \psi_3'\left(x + \sqrt{a}y\right) - \psi_2'(r)\right] \tag{11}$$

Известно, что решение уравнения

$$u_{xx} - a u_{yy} = \Phi(x,y) \tag{12}$$

представимо в виде:

$$2u(x,y)=\tau\left(x+\sqrt{a}y\right)+\tau\left(x-\sqrt{a}y\right)+\int\limits_{x-\sqrt{a}y}^{x+\sqrt{a}y}\nu(t)dt-\Phi_1(x,y), \qquad (13)$$

$$\tau(x)=\lim_{y\to 0}u(x,y),$$

$$\nu(x)=\lim_{y\to 0}u_y(x,y)$$

— пока неизвестные функции, а

$$\Phi_1(x,y)=\int\limits_0^y\int\limits_{x-\sqrt{a}y+t}^{x+\sqrt{a}y+t}\Phi(x,y)d\xi d\eta.$$

Используя условие (4), из (10) получим следующее соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau(x)-\int\limits_0^y\nu(t)dt=\alpha(x), \qquad (14)$$

где $\alpha(x)=2\psi_1(x)+2\Phi_1(x,-x)-\psi_1(0)$

— известная функция.

В области D_1 переходя к пределу $y \to 0$ в уравнении (1), получим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, в виде

$$\beta\tau'''(x)+\gamma\tau'(x)=\nu(x). \qquad (15)$$

Решая систему уравнений (14) и (15) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\beta\tau'''(x)+(\gamma+1)\tau'(x)=\alpha'(x) \qquad (16)$$

с граничными условиями

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \ \tau'(0)=\varphi_2(0),\ \tau''(r)=\varphi_3(0). \qquad (17)$$

С помощью условий (17) уравнение (16) сводится к интегральному уравнению

$$\tau(x)=\lambda\int\limits_0^x(x-t)\tau(t)dt+\alpha_1(x)+\frac{\tau''(0)x^2}{2}, \qquad (18)$$

$$\lambda = \frac{\gamma + 1}{\beta}, \quad \alpha_1(x) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0)x + \int_0^x \frac{x-t}{\beta}\alpha(t)dt + \frac{(a+1)\varphi_1(0) - \psi_1(0)}{2\beta}x^2.$$

где

Обращая интегральное уравнение (18) используя условие (17) имеем

$$\tau(x) = A(x) + \left[-\sqrt{-\lambda}\varphi_1(0)ch\left(\sqrt{-\lambda}r\varphi_1(0)\right) + c\right]B(x), \qquad (19)$$

где

$$c = -\frac{\alpha(r) + a\varphi_1(0)}{\beta} - \varphi_3(0),$$

$$A(x) = \alpha_1(x) - \sqrt{-\lambda}\int_0^x sh\left[\sqrt{-\lambda}(x-t)\right]\alpha_1(t)dt,$$

$$B(x) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\int_0^x sh\left[\sqrt{-\lambda}(x-t)\right]t^2dt + \frac{x^2}{2}.$$

Далее рассмотрим уравнение (1) в параболической части.

Замена функции $u(x,y) = v(x,y)e^{Ny}$, где N = const в уравнении (1) при y > 0 приводит к следующему виду

$$v_y + \beta v_{xxx} + \gamma v_x + Nv = 0. \qquad (20)$$

Рассмотрим тождество

$$v\left[v_y + \beta v_{xxx} + \gamma v_x + Nv\right] = 0. \qquad (21)$$

Проделав некоторые преобразования из (21) получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta\left(vv_{xx} + \frac{\gamma v_x^2}{2}\right) + \frac{\gamma v^2}{2}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{v^2}{2}\right] + Nv^2 = 0. \qquad (22)$$

Интегрируя (22) по области

$$D_{1\varepsilon} = \left\{(x,y): \varepsilon < x < r - \varepsilon, \varepsilon < y < h - \varepsilon, 0 < \varepsilon < min\{r,h\}\right\},$$

и применяя, формулу Грина получаем

$$\iint_{D_{1\varepsilon}} \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta\left(vv_{xx}-\frac{v_x^2}{2}\right)+\gamma\frac{v^2}{2}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{v^2}{2}\right]+Nv^2\right\}dxdy+$$

$$+\iint_{D_{1\varepsilon}} v^2(\xi,t)d\xi dt=0.$$

$$\int_{\Gamma_{1\varepsilon}}\left[\beta\left(vv_{xx}-\frac{v_x^2}{2}\right)+\gamma\frac{v^2}{2}\right]dy-\int_{\Gamma_{1\varepsilon}}\left[-\frac{v^2}{2}\right]dx+N\iint_{D_{1\varepsilon}} v^2(\xi,t)d\xi dt=0.$$

где $\Gamma_{1\varepsilon}$ граница области $D_{1\varepsilon}$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ перепишем последнее в виде

$$N\iint_{D_1} v^2(\xi,t)d\xi dt+\int_0^r v^2(x,h)dx+\int_0^r v^2(x,0)dx$$

$$+\int_0^h\left[\beta\left(v(r,y)v_{xx}(r,y)-\frac{{v_x}^2(r,y)}{2}\right)+\gamma\frac{v^2(r,y)}{2}\right.$$

$$\left.-\beta\left(v(0,y)v_{xx}(0,y)-\frac{{v_x}^2(0,y)}{2}\right)-\gamma\frac{v^2(0,y)}{2}\right]dy=0$$

Учитывая однородность условий (2), (13) и (18) получаем следующее равенство в виде

$$N\iint_{D_1} v^2(\xi,t)d\xi dt+\int_0^r v^2(x,h)dx-\int_0^r v^2(x,0)dx-\beta\int_0^h v_x^2(r,y)dy+$$

$$+\gamma\int_0^h v^2(r,y)dy=0.\quad(23)$$

Докажем сначала, что $u(x,0)=v(x,0)=\tau(x),$ если $\tau(0)=\tau'(0)=\tau''(r)=0.$

Общее решение соответствующего дифференциального уравнения (16) имеет вид

$$\tau(x)=\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2\exp\left(-\sqrt{-\lambda}\right)+\mathrm{C}_3\exp\left(\sqrt{-\lambda}\right).\qquad(24)$$

Подставляя однородные граничные условия в общее решение, получим систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_1, C_2 , C_3 в виде

$$\begin{cases}\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3=0\\ \mathrm{C}_2-\mathrm{C}_3=0\\ \mathrm{C}_3 sh\left(r\sqrt{-\lambda}\right)=0.\end{cases}\qquad(25)$$

Решая систему (25), находим $\tau(x) = v(x,0) \equiv 0$. С учетом этого, выражение (23) примет вид

$$N \iint\limits_{D_1} v^2(\xi,t)d\xi dt + \int\limits_0^r v^2(x,h)dx - \beta \int\limits_0^h v_x^2(r,y)dy + \gamma \int\limits_0^h v^2(r,y)dy = 0. \quad (26)$$

Число **N** выбираем так, что бы левая часть уравнения (26) стало больше либо равно нуля. Тогда при $-\beta, \gamma > 0$ следует, что $u(x,y) = v(x,y) \equiv 0.$

Из этого следует, что исходная задача не может иметь более одного решения в области D_1 и соответственно в области D

Теперь перейдем непосредственно к нахождению решения в области D_1.

С помощью замены переменной

$$\xi = \frac{x}{\sqrt[3]{-\beta}} \quad (27)$$

уравнение (1) в области D_1 можно свести к более известному уравнению

$$u_y - u_{\xi\xi\xi} = \gamma_1 u_\xi, \quad (28)$$

рассмотренное в монографии [8].

Литература

1. Елеев В.А. Краевые задачи для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа третьего порядка // Нелинейные эволюционные уравнения в прикладной задаче. Киев, 1991. С. 36 — 38
2. Елеев В.А. Об одной задаче с нелокальным сдвигом для уравнения смешанного типа третьего порядка // Материалы второго Международного Российско — Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик, 2011. С. 69 — 71.
3. Елеев В. А., Кумыкова С. К. Внутренекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2010. № 5. С. 5-14.
4. Виноградова М. В., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1990. — 432с.
5. Релей Л. А. Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1940. — 499с.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: ГИФМЛ, 1959. — 440с.
7. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: АН СССР, 1959. — 164с.
8. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979. — 230с.